<u>XVIII республиканский турнир юных математиков</u>

Уважаемые преподаватели и учащиеся!

- XVIII Республиканский турнир юных математиков состоится **с 7 по 11 декабря 2016 г.** в г.Минске на базе государственного учреждения образования “Гимназия-колледж искусств им. И.О.Ахремчика” (г.Минск, ул.Макаенка, 14).

- Принять участие в турнире может команда, состоящая не более чем из шести учащихся и руководителя, которая в достаточной мере подготовит ***<u>не менее семи заданий</u>*** из числа приведенных ниже. Команда может состоять из учащихся разных классов учреждений общего среднего образования (лицея в структуре учреждения высшего образования) (допускаются сборные команды учащихся двух или более учреждений образования, района, города).

- Турнир юных математиков — это коллективные (командные) соревнования учащихся в умении решать исследовательские задачи, наглядно представлять полученные результаты, аргументированно отстаивать свою точку зрения в публичных дискуссиях. Турнир проходит в виде последовательно проводимых математических боев, в которых команды по очереди докладывают результаты исследований по предложенным заданиям, а также выступают в роли оппонентов для других участников. Правила проведения турнира размещены на сайте: www.uni.bsu.by (на странице “Республиканский турнир юных математиков”).

- ***Для участия в турнире до 15 октября 2016 г.*** необходимо подать в оргкомитет **предварительную заявку** в произвольной форме, содержащую краткую информацию об учреждении образования, данные о руководителе, его контактный телефон, адрес электронной почты (адрес оргкомитета см. ниже). Такая заявка необходима:
  - для включения в базу данных и для рассылки (при необходимости) дополнительных материалов и приглашений;
  - для уточнения сведений при подаче официальной заявки и предварительных материалов решений исследовательских заданий (***каждое решение — в двух экземплярах и в электронной форме в формате doc, docx или pdf, озаглавленное по следующему образцу:*** “Brest-gym99-2016-problem7-predvar”, объем материалов до 30 стр. формата А4, объем электронных материалов до 3 MB, если иное не согласовано с оргкомитетом); список заданий прилагается.

- **До 9 ноября 2016 г**. необходимо представить в оргкомитет **официальную заявку и предварительные материалы** по решению всех исследованных командой заданий. Форма официальной заявки и образец оформления титульного листа материалов даны на сайте www.uni.bsu.by.

- Предварительные материалы *должны быть оформлены в соответствии с указаниями, представленными перед текстом заданий* (см. ниже, а также пп.5, 6, 7 правил проведения турнира, на сайте www.uni.bsu.by).

- **<u>Внимание!</u> Отбор команд** для участия в турнире будет осуществляться по **результатам оценивания предварительных материалов.** Кроме этого, **по этим результатам** команды получают **предварительный рейтинг,** который учитывается в ходе турнира.

• **<u>Обращаем ваше внимание</u>**, что после представления предварительных материалов в оставшееся время до начала турнира исследовательская работа по заданиям может продолжаться. В день заезда командам необходимо будет сдать в жюри ***<u>окончательные</u>*** материалы (в *<u>четырех экземплярах и в электроном виде в pdf-формате, озаглавленные по образцу:</u>* “Brest-gym99-2016-problem7-okonch”*,* см. пп.5—10 правил проведения турнира).

• Все вопросы по поводу сроков заезда команд, места проведения, финансирования XVIII Республиканского турнира юных математиков, а также свои предложения по правилам его проведения следует отправлять по адресу: пр.Независимости, 4, г.Минск, 220030 (Задворному Б.В., факультет прикладной математики и информатики, БГУ, *с пометкой*: “XVIII РТЮМ”).

Телефоны: +375-17-209-50-70 (центр профориентационной работы ФПМИ БГУ),
+375-29-657-88-08 (Задворный Борис Валентинович),
+375-29-622-10-29 или +375-33-633-10-29 (Лавринович Леонид Иванович),
Адреса электронной почты: zadvorny@bsu.by, zadvorny2014@mail.ru, lavrinovich@bsu.by, uni-centre@bsu.by.

Исследовательские задания
XVIII Республиканского турнира юных математиков

Внимательно прочтите эти указания: в них содержится важная информация о характере заданий турнира, о том, что значит решить (исследовать) задания турнира и об их оформлении!

Обращаем ваше **ВНИМАНИЕ** на то, что предлагаемые задания (далее — задачи) носят исследовательский характер, наилучшие обобщения и полные решения неизвестны даже их авторам, поэтому:

- необходимо **по возможности максимально полно** исследовать каждую задачу, но в то же время нужно иметь в виду, что в ряде задач <u>интерес представляют даже</u> ***<u>отдельные частные случаи</u>*** *<u>заданий (их пунктов или небольших значений параметров)</u>*;
- возможно (это допускается и даже приветствуется) вы *сможете усилить ряд утверждений*, приведенных непосредственно в формулировках задач;
- кроме рассмотрения исходной постановки, *<u>полезно рассмотреть свои направления</u>*<u>, причем ваши исследования</u> **<u>НЕОБЯЗАТЕЛЬНО</u>** <u>должны совпадать с предложениями авторов</u>;
- **ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИЛЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО КАЖДОЙ ЗАДАЧЕ НЕОБХОДИМО ОФОРМИТЬ ОТДЕЛЬНО** в распечатанном виде **в двух экземплярах** (до 30 стр. формата А4), а также в электронной форме (образец названия файлов: “Brest-gym99-2015-problem7-predvar”, объем до 3 MB, если иное не согласовано с оргкомитетом), при этом:
    - оформление каждой задачи должно начинаться **С ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА**, на котором нужно указать номер задачи и ее название, название учреждения образования, название команды (если команда является сборной двух или нескольких учреждений), город, автора(ов) исследования (решения);

- **НИЖЕ НА ТИТУЛЬНОМ ЛИСТЕ** (или на втором листе) **обязательно дайте краткое резюме вашего исследования:** какие пункты вы решили, какие сделали обобщения, четко сформулируйте ВАШИ СОБСТВЕННЫЕ ГЛАВНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ (утверждения, примеры, гипотезы);
- **ОБЯЗАТЕЛЬНО** дайте четкие ссылки на литературу и другие источники, которые вы использовали при проведении исследований (в месте их использования).

Примечание. Тексты исследовательских заданий в электронном виде с дополнительными комментариями представлены также на сайте **www.uni.bsu.by.** В случае обнаружения опечаток, двусмысленностей и других неточностей, а также в случае возникновения вопросов по условиям заданий просим обращаться по адресам электронной почты (или по телефонам), указанным выше.

Задача 1. Битва умов

I. Паша задумал натуральное число, не превышающее N. Слава, для того чтобы угадать это число, задает Паше вопросы, на которые тот отвечает либо “да”, либо “нет”.

I.1. Какое наименьшее количество вопросов понадобится Славе, чтобы угадать число, если $N = 32$? А в общем случае?

I.2. Какое наименьшее количество вопросов понадобится Славе, чтобы угадать число, если $N =16$ и Паша при ответах один раз может обмануть? А если он может обмануть два раза? Исследуйте общий случай.

I.3. Паше надоело отвечать на вопросы Славы и он решил с пользой провести время. Теперь за каждый ответ “да” Слава дает Паше две конфеты, а за каждый ответ “нет” — одну конфету. Какое наименьшее количество конфет потребуется Славе, если $N = 144$? А в общем случае? А если надо дать m и n конфет соответственно? А если Паша один раз может обмануть?

II.1. Паша задумал двоичное число длины 8 бит (т.е. число, состоящее из 8 цифр, возможно, с ведущими нулями). Слава называет Паше двоичное число такой же длины. Паша в качестве ответа сообщает, в скольких позициях задуманное число совпадает со Славиным числом, при этом сами позиции не называет. Какое наименьшее количество вопросов потребуется Славе, чтобы угадать задуманное число?

II.2. Дана строка известной длины n, на алфавите размера k (т.е. состоящего из k символов (букв)). Разрешается сравнить её с некоторой (произвольно выбранной) другой строкой длины n и узнать количество совпадений букв на одинаковых местах. За какое минимальное количество таких операций можно узнать исходную строку?

III.1. Паша задумал двоичное число длины 8 бит (возможно, с ведущими нулями). Слава называет Паше двоичное число. Паша в качестве ответа говорит, встречается ли в задуманном числе последовательность нулей и единиц, идущих подряд, названная Славой. Какое наименьшее количество вопросов потребуется Славе, чтобы угадать задуманное число?

III.2. Дана строка известной длины n, на алфавите размера k. Разрешается узнать, содержится ли в ней некоторая (произвольно выбранная) другая строка длины не более n. За какое минимальное количество таких операций можно узнать исходную строку?

IV.1. Паша задумал двоичное число длины 8 бит (возможно, с ведущими нулями). Слава называет Паше двоичное число. Паша в качестве ответа говорит, можно ли после вычеркивания какого-то количества цифр в задуманном им числе получить Славино число. Какое наименьшее количество вопросов потребуется Славе, чтобы угадать задуманное число?

IV. 2. Исследуйте предыдущий пункт в общем виде.

Задача 2. Одна задача об оптимальном движении объекта

В точке O находится прожектор, который освещает отрезок OP круга $\boldsymbol{B}$ радиуса R (точка P лежит на границе круга $\boldsymbol{B}$, см. рис. 1). Прожектор, а вместе с ним и отрезок OP, равномерно вращаются против часовой стрелки, делая один оборот за время T. Объект, рассматриваемый как материальная точка M, начиная с некоторого момента и стартуя из заданной точки на границе круга $\boldsymbol{B}$, движется внутри его или по границе с постоянной по величине скоростью v (направление движения может изменяться, но попадать в освещаемую область после начала движения запрещено).

Предлагается изучить *оптимальность движения* объекта (*траектории*), исходя из двух основных целей (задач):

(1) первая цель: определить, с какой минимальной скоростью необходимо двигаться объекту, чтобы достичь точки O (здесь и ниже следует учитывать, что вид траектории движения (уравнение) и момент начала движения необходимо определить исходя из цели задачи);

(1*a*) обобщенная первая цель: объекту необходимо максимально приблизиться к точке O (предполагается, что величина скорости фиксирована, т.е. не обязательно минимальна; при этом необходимо найти траекторию, двигаясь по которой максимально приближается к точке O или ее достигает);

(2) вторая цель: объекту следует проделать наиболее длинный путь, двигаясь с фиксированной скоростью в соответствии с описанными выше правилами (в частности, описать условия (траектории), при выполнении которых объект может двигаться сколь угодно долго)

Кратко говоря, оптимальность в первой задаче (1) и (1a) — это максимальность приближения к точке O, во второй — максимальность длины пути.

Изучение общей задачи возможно начинать со следующей постановки: исследовать задачи (1), (1*a*), (2) для траекторий движения объекта из определенного класса $\boldsymbol{K}$ (или принадлежащих некоторому множеству $\boldsymbol{K}$). В этом случае будем говорить о поиске *наилучшей траектории* движения из определенного класса (множества), на которой достигаются соответствующие цели. Другими словами, наилучшая траектория — это оптимальная для траекторий определенного класса. В частности, рассмотрите следующие вопросы.

1. Найдите наилучшую траекторию, наименьшую скорость движения объекта и длину его пути, если объект начинает движение из граничной точки круга ***B*** по направлению его радиуса.
2. Найдите наилучшую траекторию и ее длину для следующих классов траекторий:
   а) ***К*** — множество дуг окружностей, соединяющих фиксированную точку на границе круга ***B*** с его центром *O*;
   б) ***К*** — множество двухзвенных ломаных, соединяющих фиксированную точку на границе круга ***B*** с его центром *O* (возможно самостоятельное введение ограничений на вид таких ломаных);
   в) ***К*** — множество спиралей, соединяющих фиксированную точку на границе круга ***B*** с его центром *O* (возможно самостоятельное определение вида (формул) таких спиралей);

Пояснение. Одно из естественных определений спирали: спираль — множество точек, декартовы координаты которых определяются уравнением $x = R(1 - t)\cos \alpha t$, $y = R(1 - t)\sin \alpha t$, где R – радиус круга **B**, а α – некоторое вещественное число, t – параметр, изменяющийся от 0 до 1. При решении пункта можно рассматривать и другие виды спиралей.

3. Найдите наилучшую траекторию, наименьшую скорость движения объекта и длину его пути, если скорость движения в начальный момент направлена перпендикулярно радиусу круга *OM*.
4. Определите оптимальную траекторию, наименьшую скорость движения объекта и длину его пути, если направление начальной скорости неизвестно. Начальная скорость направлена под ненулевым и непрямым углом к радиусу круга, который необходимо определить. Проиллюстрируйте решение поставленных задач в случае R = 1 км и T = 1 мин.
5. Попробуйте определить оптимальные траектории в общем случае или при некоторых других ограничениях (задайте их сами).
6. Исследуйте поставленные задачи в случае, когда прожектор освещает сектор *KOP* круга радиуса *R* с центральным углом α , как показано на рисунке 1.
7. Постройте график зависимости наименьшей скорости *v* от угла раствора сектора α при *R* = 1 *км* и *T* = 1 *мин* при оптимальном движении объекта.
8. Предложите свои обобщения рассматриваемой задачи и исследуйте их.
9.

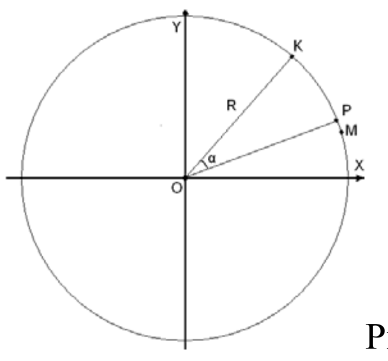


Рис 1. К постановке задачи № 2

Задача 3. Среднее степенное

Для положительных чисел a и b и любого действительного p обозначим среднее степенное степени p через $A_p(a,b)=\begin{cases}\left(\dfrac{a^p+b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}, & p\neq 0,\\ \sqrt{ab}, & p=0.\end{cases}$ В дальнейшем для краткости будем писать просто A_p.

1. Докажите, что $\frac{1}{2}A_1+\frac{1}{2}A_{-1}\geq A_0$.

2. Докажите, что $\frac{1}{2}A_p+\frac{1}{2}A_{-p}\geq A_0$ для любого p.

3. Докажите, что: а) при $\lambda\geq\frac{1}{\sqrt{2}}$ верно неравенство $A_1\leq\lambda A_2+(1-\lambda)A_0$,

б) при $\lambda\leq\frac{1}{2}$ верно неравенство $A_1\geq\lambda A_2+(1-\lambda)A_0$,

в) при $\lambda\in\left(\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ найдутся контрпримеры к приведенным последним двум неравенствам.

4. Найдите наименьшее значение λ, при котором будет верно неравенство: $A_0\leq\lambda A_2+(1-\lambda)A_{-1}$.

5. Докажите, что $\frac{1}{2}A_2+\frac{1}{2}A_4\leq A_3$.

6. Докажите, что для $p>1$ верно $\frac{1}{2}A_{p-1}+\frac{1}{2}A_{p+1}\leq A_p$.

7. Докажите, что для любого $t\leq 4$ верно неравенство $\frac{1}{2}A_t+\frac{1}{2}A_0\leq A_1$

8. Для какого наибольшего t верно неравенство $\frac{1}{2}A_t+\frac{1}{2}A_{-1}\leq A_1$?

9. Предложите свои обобщения. Рассмотрите, например, среднее степенное от трех и более переменных, или рассмотрите произведение средних степенных, или вместо среднего арифметического двух средних степенных рассмотрите другие средние.

Задача 4. Шарики в коробках

1. Имеется несколько коробок, пронумерованных цифрами от 1 до N, и набор шариков, также пронумерованных цифрами от 1 до N. Шарики разложены по коробкам так, что в каждой коробке находится ровно один шар. Запись (n1, n2, ..., nN) означает, что в коробке с номером 1 лежит шарик с номером n1, в коробке с номером 2 лежит шарик с номером n2 и т.д. Например, (1, 3, 2) означает, что имеется 3 коробки и в коробке с номером 1 лежит шар с номером 1, в коробке с номером 2 лежит шар с номером 3, а в коробке с номером 3 лежит шар с номером 2. Разложение шаров по коробкам вида (1, 2, 3,...., N) называется правильным. За один ход разрешается поменять местами два любых шара. Изучите следующие вопросы:

1.1. Возможно ли за несколько ходов из разложения (4, 3, 5, 1, 2) получить правильное разложение?

1.2. Опишите все возможные разложения, которые можно получить из разложения (4, 3, 5, 1, 2).

1.3. Любое ли разложение шаров по 5 коробкам можно за несколько ходов сделать правильным?

1.4. Верно ли, что из любого разложения шаров по 5 коробкам можно получить любое другое разложение?

1.5. Возможно ли за 40 ходов из набора (5, 3, 1, 4, 2) получить набор а) (3, 4, 5, 1, 2); б) (2, 1, 5, 3, 4)?

1.6. Попробуйте оценить количество различных ходов, которое потребуется, чтобы произвольное разложение (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) шаров по 5 коробкам сделать правильным, если это возможно (ответ должен зависеть от расположения переменных a_k). Единственна ли последовательность различных ходов, с помощью которой некоторое фиксированное разложение шаров по 5 коробкам можно сделать правильным?

1.7. Попробуйте оценить количество различных ходов, необходимое для того, чтобы произвольное разложение (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) шаров по 5 коробкам сделать разложением вида а) (5, 4, 3, 2, 1); б) (5, 1, 4, 2, 3).

1.8. Попробуйте описать множество различных разложений шаров по 5 коробкам, которое можно получить из некоторого фиксированного разложения (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) за а) три хода; б) четыре хода; в) k ходов.

2. Рассмотрите аналогичные вопросы для произвольного числа коробок N.

3. Пусть теперь в условиях пункта 1 за один ход разрешается сделать следующее: в произвольном порядке выбрать три коробки и переложить содержимое первой выбранной коробки во вторую, второй выбранной коробки — в третью, а третьей выбранной коробки — в первую. Рассмотрите вопросы пунктов 1 и 2 в этом случае.

4. Пусть в условиях пункта 1 за один ход разрешается сделать следующее: в произвольном порядке выбрать m коробок с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_m$ и переложить содержимое коробки с номером i_1 в коробку с номером i_2, коробки с номером i_2 — в коробку с номером i_3, ..., коробки с номером i_m — в коробку с номером i_1. Назовем такую операцию *произвольным циклическим сдвигом m коробок*. Рассмотрите вопросы пунктов 1 и 2 в этом случае.

5. Рассмотрите случай, когда в условиях пункта 4 номера выбранных коробок $i_1, i_2, \ldots, i_m$ должны быть упорядочены а) по возрастанию (назовем такую операцию *прямым циклическим сдвигом m коробок*); б) по убыванию (назовем такую операцию *обратным циклическим сдвигом m коробок*).

6. Пусть дан некоторый набор различных натуральных чисел $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$, $1 \le m_i \le N$. За один ход разрешается выбрать одно из чисел m_i и совершить а) произвольный циклический сдвиг m_i коробок; b) прямой циклический сдвиг m_i коробок; c) обратный циклический сдвиг m_i коробок. Рассмотрите вопросы пунктов 1 и 2 для произвольного набора чисел M или хотя бы для некоторых наборов:

6.1. $M = \{2, 3\}$;

6.2. M состоит из всех четных натуральных чисел, не превосходящих N;

6.3. M состоит из всех нечетных натуральных чисел, не превосходящих N;

6.4. M состоит из всех натуральных чисел, делящихся на 3 и не превосходящих N;

6.5. M состоит из всех натуральных чисел, делящихся на t и не превосходящих N;

7. Предложите и рассмотрите различные обобщения этой задачи.

Задача № 5. Переливания — 2

1) *Начальная постановка*. Имеется три одинаковых стакана с водой объемом 1 литр каждый: первый стакан заполнен водой наполовину, второй — на треть, третий — на три четверти. Здесь и ниже разрешаются следующие операции: переливать воду из одного стакана в другой полностью (если вся вода поместится) или переливать воду из одного стакана в другой до тех пор, пока тот не заполнится доверху (при этом остаток воды останется в первом стакане). Может ли после нескольких переливаний какой-нибудь стакан оказаться наполненным: а) на одну двенадцатую; б) на одну шестую? Какие объемы воды можно получить в каком-то из стаканов, выполняя описанные операции?

2) *Чуть более сложная постановка*. Имеется семь одинаковых стаканов с водой объемом 1: первый стакан заполнен водой наполовину, второй — на треть, третий — на четверть, четвертый — на одну пятую, пятый — на одну восьмую, шестой — на одну девятую и седьмой — на одну десятую. Может ли после нескольких переливаний какой-нибудь стакан оказаться наполненным: а) на одну двенадцатую; б) на одну шестую?
<u>Общий вопрос</u>: какие численные значения объема воды можно получить в этом случае, а какие нельзя?

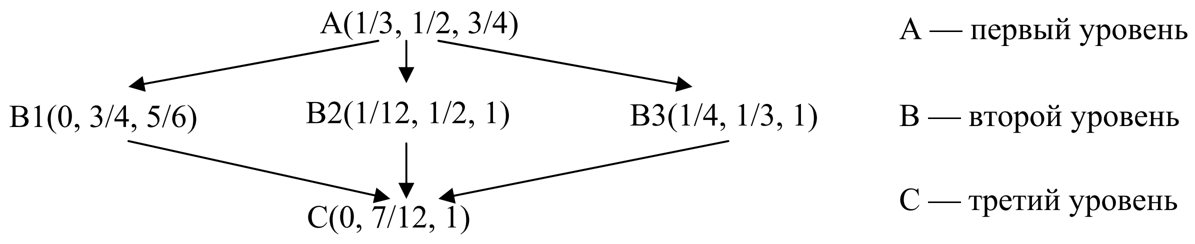
3) *Общая постановка*. Пусть имеется несколько одинаковых сосудов (три, четыре, пять, …) с объемом 1, наполненных на $p_1, p_2, p_3, \ldots$, жидкостью (все $p_i \in Q$, $0 < p_i < 1$). Найти все множество значений m/n такие, что можно некоторой последовательностью переливаний получить сосуд, заполненный на m/n ($0 < m/n < 1$, $m, n \in N$).

4) *Еще более общая постановка*. Исследуйте задачу из пункта 3 в случае, когда все $p_i \in Q(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}, a, b \in Q\}$.

5) *Обобщения*. Предложите свои обобщения этой задачи и исследуйте их. *Возможные дополнительные направления*

6) Назовем состоянием системы сосудов упорядоченную по возрастанию n-ку чисел (например, в пункте 1) в исходном положении состояние системы — это тройка (1/3, 1/2, 3/4)). Каждое переливание переводит состояние системы в новое состояние. Построим ориентированный граф, вершинами которого будут являться возможные состояния системы, а ребрами (направленными дугами) —

соответствующие однократные переливания (операции). Например, для системы из пункта 1 граф будет иметь такой вид:



Возможно изучение совокупности состояний и схемы переливаний через исследование структуры этого графа и его свойств. В частности, на рисунке граф представлен в виде трех уровней, соответствующих числу переливаний, т.е. на первый уровень (B) попадаем из нулевого за одно переливание, на второй уровень (C) — за два переливания. При этом в состоянии B1 среди чисел тройки один нуль, назовем такое состояние 0-состоянием, в состояниях B2 и B3 одна единица (без нулей), назовем их 1-состояниями, а в состоянии C — один нуль и одна единица, назовем его 01-состоянием. Ясно, что в любом графе состояний на втором уровне будет несколько (сколько?) 0-состояний и несколько (сколько?) 1-состояний, а на последнем уровне будет одна вершина (состояние) вида (0, …, 0, α, 1, …, 1), где в начале стоит k нулей, а в конце m единиц (если $n = k + m + 1$).

Для исследования графа состояний и его структуры предложите соответствующие определения и опишите соответствующие свойства и количественные характеристики.

7) Особый интерес может представлять изучение устойчивости структуры графа (по сути, устойчивости системы сосудов) в зависимости от начальных состояний.

Продемонстрируем это свойство на следующем примере: если в исходном состоянии указанного выше графа изменить все числа (увеличить или уменьшить объемы) на 0,0001, то структура графа с точки зрения количеств 0-, 1- и 01-состояний не изменится. В то же время, если значение ¾ заменить на 1/12, то все состояния графа станут 0- или 00-состояниями.

Кажется очевидным, что небольшие (какие именно?) изменения начальных значений не изменяют общей структуры данного графа. Такие графы разумно называть устойчивыми. В связи с этим предлагается:

А) дать строгое определение устойчивости и неустойчивости графов,

Б) показать существование графов обоих типов,

В) для устойчивых графов предложить оценки возможных изменений начального состояния, при которых структура графа не изменяется,

Г) предложить и изучить свои вопросы или обобщения в этом направлении (возможно дать свои описания структуры графа и проч.).

№ 6. Скачки по таблице

1) Пусть дана числовая таблица размера $m \times n$, имеющая m строк и n столбцов.

Запись элемента a_{ij} означает, что этот элемент содержится в i-ой строке (сверху) и j-ом столбце (слева) таблицы. Ходом коня длины $z+2$ можно попасть из клетки a_{ij}, вообще говоря, в одну из восьми клеток таблицы: $a_{i\pm 1\, j\pm(z+1)}$ либо $a_{i\pm(z+1)\, j\pm 1}$ с соответствующим выбором знаков + или – . При этом в данной задаче под ходом коня будем понимать кратчайшую упорядоченную совокупность элементов таблицы, соединяющих начальную и конечную клетку и имеющую вид уголка. Например, для попадания из клетки a_{ij} в клетку $a_{i-1\, j-z-1}$ можно воспользоваться одним из двух ходов: $(a_{ij}, a_{i-1\, j}, a_{i-1\, j-1}, a_{i-1\, j-2}, \ldots, a_{i-1\, j-z-1})$ или $(a_{ij}, a_{ij-1}, a_{ij-2}, \ldots, a_{ij-z}, a_{i-1\, j-z-1})$.

Первый и последний элементы указанных совокупностей будем называть соответственно *началом* и *концом хода* коня.

Вместе с описанными ходами будем рассматривать случаи, когда несколько последних элементов хода (описанной совокупности) не существует в таблице. Такой ход коня назовем *укороченным*. Последний элемент укороченного хода коня будем также называть концом хода.

Примечание. Возможны два основных направления исследования: одно, при котором укороченный ход должен сохранять вид уголка, второе — когда конец хода может находиться в той же строке или столбце, что и его начало. Четко укажите, в каком направлении проводится ваше исследование (или какие виды укороченных ходов допускаются).

Обозначим * (или при необходимости $\circ$) одну из алгебраических операций (сложение, вычитание, умножение или деление). Введем операцию K^* над элементами таблицы, которую мы будем называть операцией «ход коня со $*$». Пусть a_{ij} – начало хода коня, a_{ks} – конец этого хода, тогда операция $K^*(a_{ij}, a_{ks})$ означает замену в таблице элемента a_{ks} на элемент $a_{ij} * a_{ks}$ (если указанная замена возможна). Возможно одновременное введение двух операций * и $\circ$ над элементами таблицы.

Рассмотрите следующие пункты задачи при условии, что все числа таблицы должны принадлежать: I) множеству натуральных чисел $\boldsymbol{N}$; II) множеству целых чисел $\boldsymbol{Z}$; III) множеству рациональных чисел $\boldsymbol{Q}$; IV) множеству действительных чисел $\boldsymbol{R}$; V) другим числовым множествам.

1. Пусть $z = 0$ (такой ход коня будем называть *уголком*).

а) Найти условия, при которых из данной таблицы 2×2 пользуясь операцией “уголок со $*$” (например, уголок со сложением, уголок с вычитанием и др.) можно получить наперед заданную 2×2 таблицу, например $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

б) Пусть задана некоторая таблица 2×2. Попробуйте описать множество всех таблиц, которые можно получить из заданной.

в) Рассмотреть аналогичные задачи для таблицы размерности 3×3.

г) Рассмотреть аналогичные задачи для таблицы произвольной размерности $m \times n$.

д) Рассмотрите аналогичные задачи для уголков с двумя операциями (например, уголков со сложением и вычитанием).

2. Пусть $z = 1$ (этот случай соответствует обычным ходам коня). Рассмотрите задачи, аналогичные пункту 1 в этом случае.

3. Рассмотрите аналогичные задачи для других ходов коня, а также в случае ходов с тремя операциями, с четырьмя операциями.

4. Предложите свои обобщения данной задачи. Например, рассмотрите аналогичные задачи для ходов других “шахматных фигур” (дайте соответствующие определения); рассмотрите трехмерные таблицы; используйте другие “хождения” по элементам таблицы — один из вариантов хождения см. в следующем абзаце:

Скачками коня будем называть последовательность ходов коня, при которых каждый следующий ход коня имеет длину на 1 бóльшую длины предыдущего хода, (укороченные ходы тоже включаются в рассмотрение, укажите, как при этом вы их используете). Попробуйте рассмотреть задачи, аналогичные предыдущим пунктам для скачков коня.

Задача 7. Геометрические миниатюры — 2

Условимся считать, что в каждом из следующих пунктов площадь (объем) исходного многоугольника или многогранника (треугольника *ABC*, квадрата *ABCD*, пирамиды *SABC* и т.д.) равен 1.

1. А) Пусть точки *L, M* и *N* делят стороны *BC, CA* и *AB* треугольника *ABC* в отношениях 2:1. Докажите, что прямые *AL, BM* и *CN* образуют треугольник, площадь которого относится к площади треугольника *ABC* как 1:7.

Б) Найдите площадь треугольника *LMN*.

В) Пусть точки *L, M* и *N* делят стороны *BC, CA* и *AB* треугольника *ABC* в отношениях λ:1, μ:1 и ν:1 (здесь и далее отношения указываются по часовой стрелке, т.е. в данном случае указаны отношения *BL*:*LC*, *CM*:*MA*, *AN*:*NB* соответственно). Найдите площадь треугольника, образованного прямыми *AL, BM* и *CN*.

Г) Найдите площадь треугольника *LMN*.

Д) Найдите площади других треугольников (многоугольников), получающихся при пересечении отдельных сторон исходного треугольника и прямых, указанных выше (*возможно описание общего подхода к получению соответствующих формул и демонстрация этого подхода на примерах*).

Е) Поставьте и исследуйте аналогичные вопросы для пирамиды *SABC*.

2. А) Соединим вершины *A, B, C, D* квадрата *ABCD* с серединами сторон *BC, CD, DA, AB* соответственно. Докажите, что при пересечении указанных отрезков получается квадрат, и найдите его площадь.

Б) Другой квадрат получится, если соединить точки *A, B, C, D* с серединами сторон *CD, DA, AB, BC*. Докажите, что общая часть этих двух малых квадратов является центрально-симметричным восьмиугольником, и найдите его площадь.

В) Пусть точки *L, M, N, K* делят стороны *AB, BC, CD, DA* квадрата *ABCD* в отношениях λ:1, μ:1, ν:1, ψ:1. Решите задачи, аналогичные пунктам 2.А) и 2.Б) в этом случае.

Г) Найдите отношение площади четырехугольника *LMNK* к площади квадрата *ABCD*.

Д) Поставьте и исследуйте другие задачи по аналогии с пунктом 1.Д); получите соответствующие формулы и подходы и продемонстрируйте их применение.

Е) Исследуйте аналогичные вопросы для куба *ABCDA’B’C’D’*.

3. Исследуйте аналогичные вопросы для прямоугольника, ромба, параллелограмма, произвольного четырехугольника.

4. А) Каждая из сторон выпуклого четырехугольника разделена на пять равных частей, и соответствующие точки противоположных сторон соединены (см. рис. 1). Докажите, что площадь среднего (заштрихованного) четырехугольника равна 1/25.

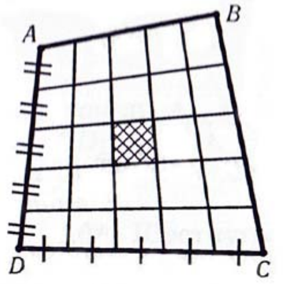


Рис. 1 к задаче № 7.

Б) Что можно сказать о площадях других маленьких четырехугольников? Найдите по возможности наиболее общие условия, при которых можно находить площади всех или некоторых из них.

В) Стороны *AB* и *CD* параллелограмма *ABCD* разбиты на *n* равных частей, а стороны *AD* и *BC* — на *m* равных частей. Точки деления соединены двумя способами: так, как показано на рис. 2а, и так, как показано на рис. 2б. Докажите, что при пересечении таких отрезков получается несколько (сколько?) параллелограммов, и найдите их площади. Чему равны площади других частей на этих рисунках?

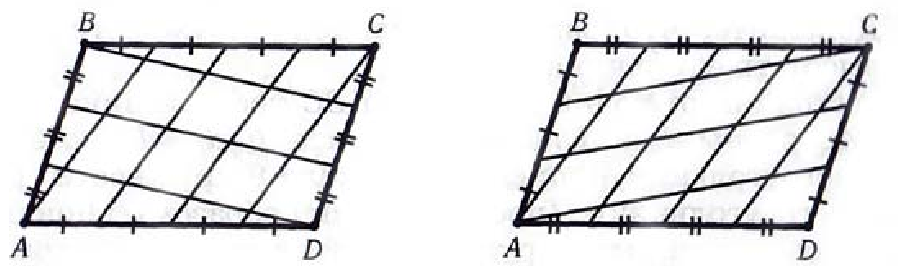


Рис. 2 к задаче № 7.

5. Отталкиваясь от идей и формул предыдущих пунктов, попробуйте разработать общие подходы к решению задач на вычисление частей произвольных выпуклых четырехугольников (других многоугольников или многогранников) при разделении их по аналогии с пунктами 4.А), 4.В) и т.п. Продемонстрируйте ваши подходы для получения конкретных формул или эффективных алгоритмов, позволяющих вычислить площади (объемы) всех получаемых частей (или хотя бы некоторых из них).

Задача 8. Обобщение формулы Пика

Пусть F — многоугольник (не обязательно выпуклый) на плоскости с целочисленными вершинами (обе координаты каждой вершины являются целыми числами). Обозначим через $N(F)$ количество целочисленных точек, расположенных внутри фигуры F, $B(F)$ — количество целочисленных точек на границе F, $\overline{N}(F) = N(F) + B(F)$ — количество точек на границе или внутри F. Известна формула Пика, которая вычисляет площадь $S(F)$:

$$S(F) = N(F) + B(F)/2 - 1.$$

Целью этой задачи является обобщение этой формулы на многомерный случай. Во всех пунктах задачи интересно получить соответствующие формулы в частных случаях (например, для фигур определенного вида: прямоугольных треугольников или тетраэдров, ромбов или прямоугольных параллелепипедов).

0. Докажите формулу Пика.

1. Покажите, что формула Пика не допускает прямого обобщения на трехмерный случай, то есть объем $V(F)$ многогранника F с целочисленными вершинами не может быть выражен через числа $N(F)$ и $B(F)$ целочисленных точек внутри и на границе многогранника.

Указание. Рассмотрите тетраэдр с координатами $(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(1,1,m)$.

Для любого натурального числа k обозначим через kF фигуру, которая получается из F гомотетией с коэффициентом k и центром в начале координат. Определим функции $p(k) = N(kF), \overline{p}(k) = \overline{N}(kF)$.

2. Пусть F — многоугольник с целочисленными вершинами.

А. Докажите, что $\overline{p}(k)$ является квадратным полиномом от k, то есть $\overline{p}(k) = p_2k^2 + p_1k + p_0$ для любого натурального числа k, причем $p_2 = S(F),\ p_1 = B(F)/2,\ p_0 = 1$.

Б. Докажите, что $p(k) = \overline{p}(-k)$.

В пунктах 3—5 фигура F является многогранником в трехмерном пространстве с целочисленными координатами.

3. Вычислите полиномы $p(k)$ и $\overline{p}(k)$ для следующих многогранников F:

(a) куб с вершинами в точках $(x_1, x_2, x_3),\ x_i = 0$ или $x_i = 1,\ i = 1,2,3$;

(b) тетраэдр с вершинами в точках $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$;

(c) октаэдр с вершинами в точках $(\pm1,0,0), (0,\pm1,0), (0,0,\pm1)$;

(d) тетраэдр из указания к пункту 1.

(e) прямоугольная призма высотой 1, основанием которой является многоугольник с целочисленными координатами.

4. Докажите, что $\overline{p}(k)$ является кубическим полиномом по k, старший коэффициент которого равен объему $V(F)$. Какой геометрический смысл имеют остальные коэффициенты этого полинома?

5. Докажите, что $p(k) = -\overline{p}(-k)$.

6. Найдите полиномы $p(k)$ и $\overline{p}(k)$ для n-мерных аналогов куба, тетраэдра и октаэдра из пунктов 3a—3c.

7. Попробуйте обобщить пункты 4 и 5 на многомерный случай.

8. Предложите свои обобщения или направления исследования и изучите их (возможно, например, рассмотрение подобных вопросов для фигур, расположенных на плоскости, покрытой треугольной решеткой, и т.п.).

Литература. А.Кушниренко. Целые точки в многоугольниках и многогранниках, Квант. № 4, 1977. — С.13—20.

Задача 9. Декомпозиции графов

Стандартные понятия теории графов, не определяемые в задаче, можно найти в книге [Мельников О.И. Теория графов в занимательных задачах. Изд. 3-е, испр. и доп. — М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2009. — 232 с.].

Графом называется пара $G = (V, E)$, где V — некоторое непустое конечное множество, E — множество неупорядоченных пар различных элементов из V. Элементы множества V называются *вершинами* графа, элементы множества E — его *ребрами*. Множество вершин графа G будем обозначать через $V(G)$, множество его ребер — $E(G)$. Граф H называется *подграфом* графа G, если вершины и ребра H принадлежат G. Подграф H графа G называется *подграфом, порожденным множеством ребер* $\{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$, если он содержит только ребра $e_1, e_2, \ldots, e_p$ и все вершины графа G, являющиеся концами этих ребер. Число вершин графа G, смежных с вершиной u, называется *степенью* этой вершины и обозначается через $\deg u$.

Пусть G — граф. *Декомпозицией графа* G называется множество попарно непересекающихся по ребрам подграфов $G_1, G_2, \ldots, G_k$ этого графа таких, что каждое ребро графа G содержится ровно в одном из этих подграфов. Иначе говоря, множество $E(G)$ ребер графа G можно разбить на подмножества $E_1, E_2, \ldots, E_k$ такие, что $E_i \cap E_j = \varnothing$ при $1 \le i \ne j \le k$,

$$E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k = E(G)$$

и подграф графа G, порожденный ребрами из E_i, изоморфен G_i, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Задача о декомпозиции графа G заключается в следующем: заданы граф G и графы $G_1, G_2, \ldots, G_k$. Выяснить, существует ли декомпозиция графа G на подграфы $G_1, G_2, \ldots, G_k$. Наиболее интересный случай описывается условием, когда все графы $G_1, G_2, \ldots, G_k$ попарно изоморфны, т. е. представляют собой один и тот же граф H. В этом случае, если граф G допускает декомпозицию на подграфы $G_1, G_2, \ldots, G_k$, то она называется *H-декомпозицией*. Например, на рис. 1 приведена P_4-декомпозиция графа, изображенного на этом рисунке первым (здесь P_4 — простая цепь на четырех вершинах).

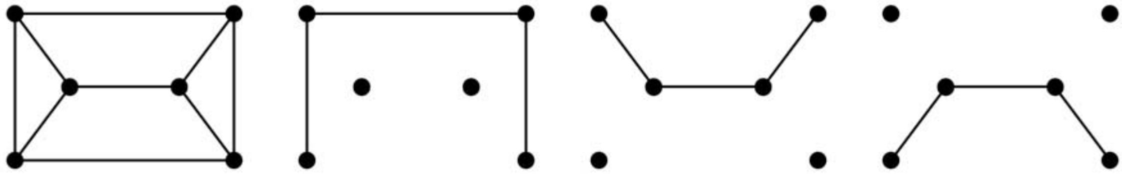


Рис. 1 к задаче № 9. P_4-декомпозиция графа.

Граф называется *связным*, если между любыми двумя его вершинами существует соединяющая их цепь. Связный граф, в котором отсутствуют циклы, называется *деревом*. Граф называется регулярным степени r, если все его вершины имеют степень r. Регулярные графы степени 3 называются *кубическими*.

Исследуйте следующие задачи.

1. Докажите, что если граф G допускает H-декомпозицию, то число $|E(G)|$ ребер графа G делится нацело на число $|E(H)|$ ребер графа H. Верно ли обратное утверждение?

2. Пусть граф G допускает H-декомпозицию, $k = |E(G)|/|E(H)|$, и пусть M — мультимножество мощности $|V(H)|\cdot k$, которое для каждой вершины $x \in V(H)$ содержит число $\deg x = k$ раз. Какому дополнительному условию должно удовлетворять мультимножество M?

3. Докажите, что если r-регулярный граф G допускает H-декомпозицию, то НОД$\{\deg x : x \in V(H)\}$ делит число r. Верно ли обратное утверждение?

4. Приведите пример графа G и двух неизоморфных деревьев H_1 и H_2 с совпадающими степенными последовательностями, для которых граф G допускает H_1-декомпозицию и не допускает H_2-декомпозицию.

5. Найдите все деревья H, для которых кубические графы: а) граф куба, б) граф Петерсена (см. рис. 2) допускают H-декомпозицию?

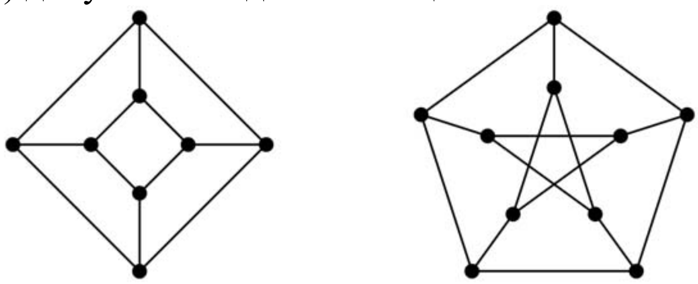


Рис. 2 к задаче № 9. Граф куба (слева) и граф Петерсена (справа).

6. Докажите, что для каждого целого числа $s \geq 5$ произвольный кубический граф не допускает P_s-декомпозиций (P_s — простая цепь с s вершинами).

7. Установите необходимые и достаточные условия существования P_s-декомпозиции произвольного кубического графа, где $s \in \{3, 4\}$. Предложите эффективные алгоритмы построения таких декомпозиций (число шагов алгоритма должно полиномиально зависеть от числа вершин кубического графа).

8. Выясните, какие кубические графы допускают $K_{1,3}$-декомпозицию (здесь $K_{1,3}$ — *звезда*, т. е. дерево со степенями вершин 3, 1, 1, 1).

9. Пусть T — множество всех попарно неизоморфных деревьев, число вершин которых не превосходит 6. Для каждого дерева $H \in T$ установите необходимые и

достаточные условия существования H-декомпозиции произвольного кубического графа. Попробуйте исследовать этот же вопрос для произвольного r-регулярного графа при $r \geq 4$.

10. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

Задача 10. Локальная схожесть графов

В задаче рассматриваются простые графы и используются общепринятые понятия теории графов (например, Мельников О.И. Теория графов в занимательных задачах. Изд. 3-е, испр. и доп. — М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2009. — 232 с.).

Граф с n вершинами называется *помеченным*, если его вершины занумерованы числами от 1 до n. Два помеченных графа считаются равными, если множества вершин и ребер у них совпадают. Два графа называются *изоморфными*, если можно занумеровать вершины каждого из них так, что если две вершины будут смежными (несмежными) в одном графе, то вершины с такими же номерами будут смежными (несмежными) во втором графе и наоборот. Изоморфные графы естественно отождествлять, т. е. считать совпадающими, и говорить о них как об *абстрактном графе*. Можно также считать, что абстрактный граф получается из помеченного графа опусканием пометок.

Подграф H графа G называется *подграфом*, *порожденным множеством вершин* $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$, если он содержит только вершины $v_1, v_2, \ldots, v_p$ и все ребра графа G, соединяющие эти вершины. Для графа G и целого числа $k \geq 1$ обозначим через $N_k(G)$ мультимножество, в котором каждой вершине v графа G соответствует подграф графа, порожденных всеми вершинами на расстоянии не более k от v (считаем, что любая вершина графа отстоит от самой себя на расстояние 0). В качестве примера рассмотрим граф G на рис. 1. Для удобства вершины графа помечены, но сам он мыслится как абстрактный. Соответствующие мультимножества $N_1(G)$ и $N_2(G)$ имеют вид, представленный на рис. 2.

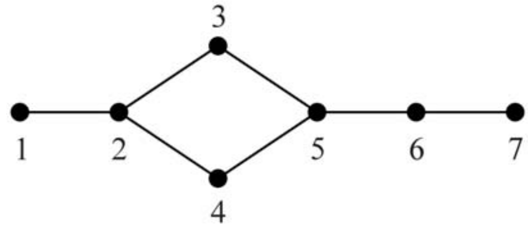


Рис. 1 к задаче № 10. Граф G.

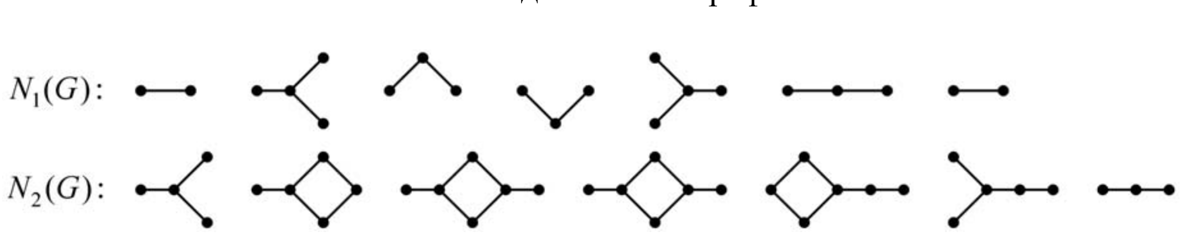


Рис. 2 к задаче № 10. Мультимножества $N_1(G)$ и $N_2(G)$.

Для целого числа $k \geq 1$ назовем два абстрактных графа G и H *локально-k равными*, если совпадают мультимножества $N_k(G)$ и $N_k(H)$. *Локально*-0 *равными* назовем графы, у которых совпадают степенные последовательности. Два локально-k равных для целого неотрицательного числа k графа назовем *локально схожими порядка k* (или просто *локально схожими*). Если все подграфы из $N_k(G)$ попарно изоморфны одному и тому же графу H, то граф G назовем *локально-k-H совершенным*.

Исследуйте следующие задачи.

0.0. Верно ли, что два графа изоморфны, если совпадают их степенные последовательности?

0.1. Найдите наименьшее число вершин, которое могут иметь два локально-0 равных неизоморфных графа.

0.2. Перечислите все попарно неизоморфные графы с числом вершин меньше 6 и исследуйте их на локальную схожесть. Найдите все попарно неизоморфные графы со степенными последовательностями (2, 2, 2, 3, 3, 4), (2, 2, 3, 3, 3, 3) и обоснуйте, что других таких графов нет.

1.0. Верно ли, что из локально-1 равенства следует изоморфизм графов? Верно ли, что из локально-1 равенства следует локально-0 равенство?

1.1. Найдите наименьшее число вершин, которое могут иметь два локально-1 равных неизоморфных графа. Приведите ответ на этот вопрос при условии, что рассматриваемые графы являются связными.

1.2. Пусть G_1 и G_2 — два локально-1-H совершенных графа с одинаковым числом вершин. Следует ли отсюда изоморфизм графов G_1 и G_2? Найдите граф H с наименьшим числом вершин, для которого существуют два локально-1-H совершенных неизоморфных графа с одинаковым числом вершин.

2. Верно ли, что для какого-либо целого неотрицательного числа k из локально-k равенства графов следует их изоморфизм? Приведите соответствующие контрпримеры. Исследуйте этот же вопрос в классе связных графов.

3. Верно ли, что из локальной схожести какого-либо порядка следует локальная схожесть меньших порядков? Верно ли, что если два графа локально схожи, то локально схожи и их дополнения?

4. Попробуйте найти все графы H с числом вершин меньше 7, для которых существуют локально-1-H совершенные графы.

5. Пусть $\xi(k)$ — наименьшее число вершин, которое могут иметь два локально-k равных неизоморфных графа; $\psi(k)$ — то же для связных графов. Найдите значения ξ и ψ для некоторых k. Попытайтесь оценить величины ξ и ψ и исследуйте точность своих оценок.

Предложите свои направления исследования в этой задаче и изучите их.

Задача 11. Деление с остатком

Известно, что для любых двух целых ненулевых чисел a, b имеет место теорема о делении с остатком: существуют целое q и целое неотрицательное r такие, что $a = bq + r,\ 0 \leq r < |b|$. В данной задаче необходимо исследовать, можно ли ввести аналог деления с остатком на различных числовых множествах. Через будем обозначать множество комплексных чисел $a + bi$, $i^2 = -1$, где a, b — действительные числа. Сложение и умножение комплексных чисел осуществляется следующим образом: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$, $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$. Для любого числового множества K через K_* обозначим множество K без нуля. Через $\mathbb{N}_0$ обозначаем множество всех натуральных чисел в объединении с нулем.

Подмножество K множества комплексных чисел назовем *допустимым*, если выполняются следующие условия: 1) K содержит и ; 2) $a + b$, $a - b$, $ab \in K$ для любых $a, b \in K$; 3) существует функция $f: K \to \mathbb{N}_0$ (т.е. принимающая целые неотрицательные значения) такая, что $f(ab) \geq f(a)$ для любых ненулевых $a, b \in K$.

Примечание. Для некоторых множеств вполне может подойти функция $f(a) = |a|$ или $f(a) = |a|^2$.

Будем говорить, что в допустимом множестве K имеет место *деление с остатком*, если для любых ненулевых $a, b \in K$ выполняется условие: существуют $q, r \in K$ такие, что $a = bq + r$, $f(r) < f(b)$, при этом число q будем называть неполным частным, а r — остатком при делении a на b. В частности, если $r = 0$, то будем говорить, что a делится на b нацело, и писать $\frac{a}{b} = q \in k$.

1. Какие из следующих множеств являются допустимыми?

a) множество целых чисел с функцией $f(a) = |a|$;

b) множество гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi: a, b \in \mathbb{Z}\}$;

c) множество чисел вида $\mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega: a, b \in \mathbb{Z}\}$, где $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$.

2. Пусть $d \neq 1$ — целое число, которое не делится на квадрат простого. Определим $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ как множество всех чисел вида $a + b\sqrt{d}$ (где a, b — рациональные), которые являются корнями многочленов второй степени с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом, равным 1. Найдите явный вид элементов множества $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ и докажите, что это множество является допустимым с функцией $f: \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \to \mathbb{N}_0$, $f(a + b\sqrt{d}) = |a^2 - db^2|$.
3. Исследуйте, на каких множествах из п.1 и п. 2 имеет место деление с остатком.
4. Пусть K — одно из множеств, определенных в п. 1 и п. 2, на котором имеет место деление с остатком. Для любых ненулевых $a, b \in K$ таких, что $\frac{a}{b} \notin K$, найдите неполное частное q и остаток r (или предложите алгоритм нахождения q, r).
5. Пусть K — одно из множеств, определенных в п. 1 и п. 2, на котором имеет место деление с остатком. Найдите наименьшую положительную постоянную α_K такую, что для любых ненулевых $a, b \in K$, $\frac{a}{b} \notin K$, имеет место неравенство $f(r) \leq \alpha_K f(b)$, где r — остаток при делении a на b.
6. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их. В частности, возможны следующие направления:

а) найти НОД двух чисел в рассматриваемых множествах K (или предложить алгоритм его нахождения);

а) найти НОК двух чисел в рассматриваемых множествах K (или описать множество НОК, если их число более одного, или предложить алгоритм его нахождения);

в) применить построенную теорию к решению некоторых диофантовых уравнений во множестве K.

Задача 12. Натуральные точки под кривой

I. Рассмотрим координатную плоскость Oxy. Точку на этой плоскости с координатами (x, y) будем называть *натуральной*, если $x, y \in \mathrm{N}$. Далее на этой плоскости рассмотрим прямую $y = \alpha x$, где α — положительное действительное число. Рассмотрим также натуральное число n. Множество натуральных точек в области (а также на ее границах), ограниченной осью Ox, прямой $y = \alpha x$ и прямой $x = n$, будем называть *множеством натуральных точек под прямой* $y = \alpha x$. Количество элементов в данном множестве будем обозначать $f_\alpha(n)$.

I.1. Найдите $f_{\sqrt{2}}(6)$ и $f_{\sqrt{3}}(4)$. Вычислите $f_1(n)$.

I.2. Существуют ли такие различные α и β, где при любом натуральном n будет выполняться равенство $f_\alpha(n) = f_\beta(n)$?

I.3. Вычислите $f_\alpha(n)$ для: а) целого α, б) α такого, что 2α — целое, в) α такого, что 3α — целое, г) $\alpha = \dfrac{a}{b}$, $\text{НОД}(a,b) = 1$ и $n = bk, k \in \mathrm{N}$;

д) попробуйте обобщить полученные результаты и получить формулу для $\alpha = \dfrac{a}{b}$, $\text{НОД}(a,b) = 1$ и произвольного n.

I.4. Сходится ли последовательность $\dfrac{f_\alpha(n)}{n^2}$ при фиксированном α. Если да, то вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_\alpha(n)}{n^2}$.

I.5. Докажите, что:

а) $f_\alpha(n) = \dfrac{1}{2}[\alpha]n(n+1) + f_{\{\alpha\}}(n)$, где $[\alpha]$ — целая часть α, т.е. такое целое k, что $k \le \alpha < k+1$, а $\{\alpha\}$ — дробная часть α, т.е. число, равное $\alpha - [\alpha]$;

б) $f_\alpha(n) + f_{1/\alpha}([n\alpha]) - [n/b] = n[n\alpha]$, где $\alpha = \dfrac{a}{b}$, $\text{НОД}(a,b) = 1$. Постройте аналог этой формулы для произвольного положительного $\alpha \in \mathrm{R}$.

в) Найдите алгоритм вычисления $f_\alpha(n)$. Начните с рационального α.

I.6. А) Проверьте выполнение равенства $f_{\alpha+\beta}(n) = f_\alpha(n) + f_\beta(n)$ для целых α и β. Найдите всё множество пар (α, β), для которых это равенство будет выполняться для любого натурального n. Найдите связь (в виде нетривиальных тождеств или неравенств) между $f_{\alpha+\beta}(n)$ и $f_\alpha(n), f_\beta(n)$.

Б) Найдите связь (в виде нетривиальных тождеств или неравенств) между $f_\alpha(n+m)$ и $f_\alpha(n), f_\alpha(m)$.

II. Аналогично введем понятие *множества натуральных точек под параболой* $y = \alpha x^2$, где α — положительное действительное число. Число элементов в этом множестве обозначим $g_\alpha(n)$. Также введём понятие *множества натуральных точек под параболой* $y = \alpha\sqrt{x}$. Число элементов в этом множестве обозначим $h_\alpha(n)$.

II.1. Попробуйте ответить на вопросы пунктов 1,2,3 для $g_\alpha(n)$ и $h_\alpha(n)$. Покажите, что

$$h_1(n) = n\left[\sqrt{n}\right] - \frac{1}{3}\left[\sqrt{n}\right]^3 - \frac{1}{2}\left[\sqrt{n}\right]^2 + \frac{5}{6}\left[\sqrt{n}\right].$$

II.2. Сходится ли последовательность $\frac{g_\alpha(n)}{n^3}$ при фиксированном α. Если да, то найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{g_\alpha(n)}{n^3}$. Решите аналогичную задачу для последовательности $\frac{h_\alpha(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$.

II.3. А) Докажите, что $g_\alpha(n) = \frac{[\alpha]n(n+1)(2n+1)}{6} + g_{\{\alpha\}}(n).$

Получите аналогичное тождество для $h_\alpha(n)$.

Б) Докажите, что если α — положительное иррациональное, то

$$g_\alpha(n) + h_{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}([\alpha n^2]) = n[\alpha n^2].$$

Получите аналог этого утверждения для произвольного положительного $\alpha \in \mathrm{R}$.

II.4. Попробуйте ответить на вопросы пунктов I.5.В, I.6 для функций $g_\alpha(n)$ и $h_\alpha(n)$.

Дальнейшие исследования. Рассмотрите обобщение данной задачи,

а) на плоскости для кривых

$y = \alpha x^{1/3}, y = \alpha x^3, y = \alpha x^{1/m}, y = \alpha x^m, y = \alpha^x, y = \log_\alpha x, y = \alpha \sin x, y = \alpha \arcsin x$;

б) в трехмерном пространстве для плоскости $z = \alpha x + \beta y$, где α и β — положительные действительные числа.

Попробуйте построить аналогичные тождества и алгоритмы.