От задачи к задаче: двугранные углы

В текущем учебном году (2017—2018) на РТ и ДРТ несколько раз встретились задачи, связанные с вычислением меры двугранного угла. эти задачи обладали некоторой новизной в том плане, что чаще всего мы встретились с задачами такого типа в правильных пирамидах.

Рассмотрим несколько таких задач.

Задача 1 (ДРТ—2018, В12).

SABC — пирамида в ко-торой SA = SB = SC = 6, AB = 2, BC = 3, AC = 4, α — линейный угол двугранного угла при боковом ребре SC.

Найдите значение выражения $12\sqrt{30}\cos\alpha$.

Решение.

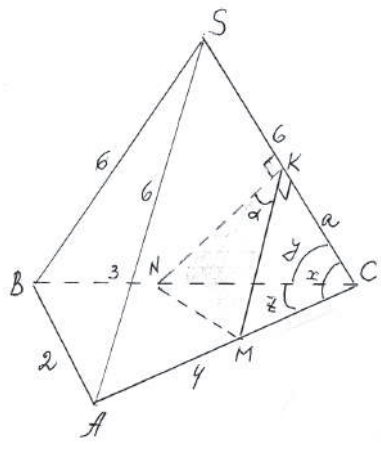

Рис. 1, а

1. SABC — пирамида,
SA = SB = SC = 6,
AB = 2,
BC = 3,
AC = 4.

$\angle$ (SC) — ?

2. Возьмём на ребре SC точку K и в гранях двугранного угла при ребре SC восставим перпендикуляры KM и KN. Получим линейный угол MKN двугранного угла с ребром SC. Для его вычисления в треугольнике MNK применим теорему косинусов.

3. Пусть: CK = a, $\angle$ SCA = x, $\angle$ SCB = y, $\angle$ ABC = Z.

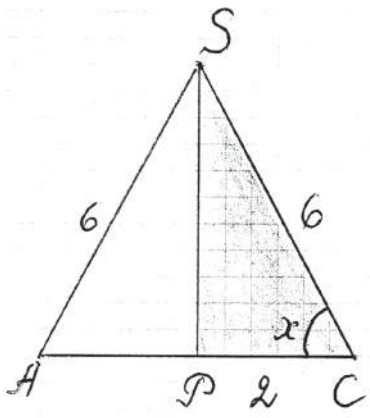

Рис. 1, б

4. ΔASC (рис.1, б) :
$\cos x = \frac{1}{3}$.

5. ΔSBC (рис.1, в) :
$\cos y = \frac{1}{4}$.

6. ΔNKC (рис.1, г) :
$NC = a : \cos y = 4a$,
$NK = \sqrt{NC^2 - CK^2} = \sqrt{16a^2 - a^2} = a\sqrt{15}$.

7. Δ MKC (рис.1, д) :
$MC = a : \cos x = 3a$,
$MK = \sqrt{MC^2 - CK^2} = \sqrt{9a^2 - a^2} = a\sqrt{8}$.

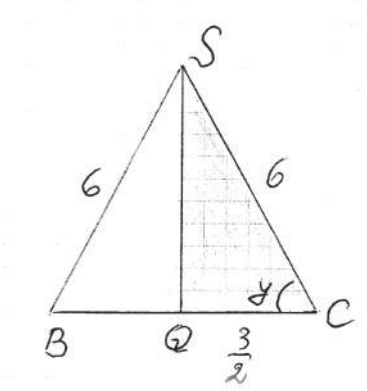

Рис. 1, в

8. По теореме косинусов в треугольнике ABC найдем cos Z :
$4 = 9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \times \cos Z$,
$\cos Z = \frac{21}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{7}{8}$.

9. В треугольнике CMN по теореме косинусов получим:

$MN^2 = MC^2 + CN^2 - 2MN \cdot CN \cdot \cos Z = 9a^2 + 16a^2 - 2 \cdot 3a \cdot 4a \cdot \frac{7}{8} = 25a^2 - 21a^2 = 4a^2$.

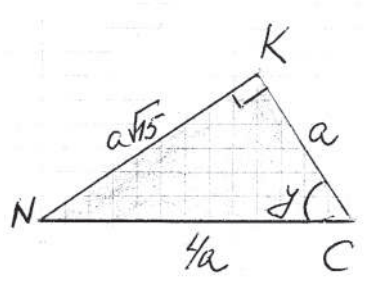

Рис. 1, г

10. И, наконец, в ΔMNK найдем $\cos\alpha$.

$4a^2 = 15a^2 + 8a^2 - 2a\sqrt{15} \cdot a\sqrt{8} \cdot \cos\alpha$,
$\cos\alpha = \frac{19}{2\sqrt{15} \cdot \sqrt{8}} = \frac{19}{4\sqrt{30}}$.

11. $\frac{19}{4\sqrt{30}} \cdot 12\sqrt{30} = 57$.

Ответ: 57.

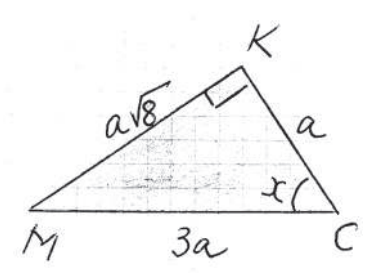

Рис. 1, д

Задача 2 (РТ2, вариант 1, В12).

В основании пирамиды SABCD лежит прямоугольник со сторонами 1 и 5. Боковое ребро SB перпендикулярно плоскости основания пирамиды и равно $2\sqrt{6}$.

Найдите значение выражения $\frac{2}{\cos\alpha}$,

где α — линейный угол двугранного угла с ребром SD.

Решение.

Рис. 2

1. SABCD — пирамида,
ABCD — прямоугольник,
SB $\perp$ ABC,
AD = 5,
DC = 1,
$SB = 2\sqrt{6}$.

$\angle$ (SD) – ?

2. $\angle$ SAD = 90°, $\angle$ SCD = 90° на основании теоремы о 3-х перпендикулярах.

3. Возьмем точку K на ребре SD и восставим из нее перпендикуляры KM и KN к ребру SD в гранях двугранного угла.

4. Обозначим : SD = a, $\angle$ SDN = ϕ.

5. Из прямоугольных треугольников SBA, SBC, SAD найдем: SA = 5, SC = 7, $SD = 5\sqrt{2}$.

6. ΔKMD : MK = a, $MD = a\sqrt{2}$.

7. ΔSDC : $\operatorname{tg}\phi = SC : CD = 7 : 1 = 7$.

8. ΔDKN : $NK = KD \cdot \operatorname{tg}\phi = 7a$,
$DN = \sqrt{DK^2 + KN^2} = \sqrt{a^2 + 4ga^2} = \sqrt{SOa^2} = Sa\sqrt{2}$.

9. ΔMDN : $MN^2 = DM^2 + DN^2 = (a\sqrt{2})^2 + (5a\sqrt{2})^2 = 52a^2$.

10. ΔMNK:
$MN^2 = MK^2 + NK^2 - 2MK \cdot NK \cdot \cos\alpha$:
$52a^2 = a^2 + 49a^2 - 2 \cdot a \cdot 7a \cdot \cos\alpha$,
$\cos\alpha = \frac{-2}{2 \cdot 7} = -\frac{1}{7}$.

11. $2 : \cos\alpha = 2 : \left(-\frac{1}{7}\right) = -14$.

Ответ: –14.

Задача 3.

Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1$, B_1C_1 равна 12, ребро основания — 20.

Точки M и K перинадлежат ребрам AB и AC так, что AM : MB = 2 : 3, AK : KC = 3 : 1.

Найдите значение выражения

$5\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$, где α — линейный угол двугранного угла C1(KM) B.

Решение.

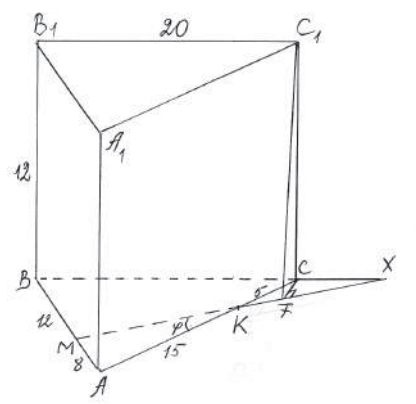

Рис. 3

1. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма,
AB = 20,
AA_1 = 12,
AM : MB = 2 : 3,
AK : KC = 3 : 1
C_1 (MK) B — двугранный угол.

$\angle$(MK) —?

2. Проведем CF $\perp$ MK, C_1F. По теореме о 3-х перпендикулярах $C_1F \perp MK$. Угол C_1FC — линейный для двугранного угла C_1 (MK) B по определению линейного угла.

3. Исходя из данных длин и отношений длин отрезков имеем: BM = 12, MA = 8, AK = 15, KC = 5.

4. Пусть MK $\cap$ BC = X, $\angle AKM = \angle CKX = \phi$.

5. В ΔAMK по теореме косинусов имеем:
$MK^2 = 8^2 + 15^2 - 2 \cdot 8 \cdot 15 \cdot \cos 60° =$
$= 64 + 225 - 120 = 169$, MK = 13.

5. ΔAMK:
$8^2 = 13^2 + 15^2 - 2 \cdot 13 \cdot 15 \cdot \cos\phi$,
$\cos\phi = \frac{169 + 225 - 64}{2 \cdot 13 \cdot 15} = \frac{330}{30 \cdot 13} = \frac{11}{13}$.

6. ΔCKF : $CF = 5 \cdot \sin\phi = 5 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{11}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}\sqrt{2 \cdot 24} = \frac{5}{13} \cdot 4\sqrt{3}$.

7. ΔC_1CF :
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{C_1C}{CF} = \frac{12 \cdot 13}{5 \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{39}{5\sqrt{3}}$

8. $5\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}\alpha = 5\sqrt{3} \cdot \frac{39}{5\sqrt{3}} = 39$.

Ответ: 39.

* * *

Иногда линейный угол можно найти, не строя сам линейный угол.

Решим следующую задачу.

Концы отрезка AB лежат в гранях двугранного угла, мера которого равна ϕ. Из концов отрезка AB проведены перпендикуляры AC и BД на ребро двугранного угла;

AC = a, BД = b, CД = c.

Найти длину отрезка AB.

Решение.

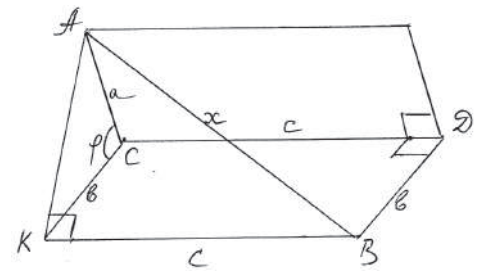

Рис. 4

Будем считать, что грани двугранного угла изображаются параллелограммами, которые в свою очередь изображают прямоугольники (рис.4).

Из рисунка понятно:

$x^2 = AB^2 = AC^2 + KB^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\phi + c^2$.

И так,

$x^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\phi$.

Зная отрезки x, a, b, c, можно найти $\cos\phi$, т.е. меру двугранного угла.

Задачи 1 и 2 могут быть решены с помощью указанной формулы, о чем схематично говорит рис.5 (находится мера двугранного угла с ребром MC).

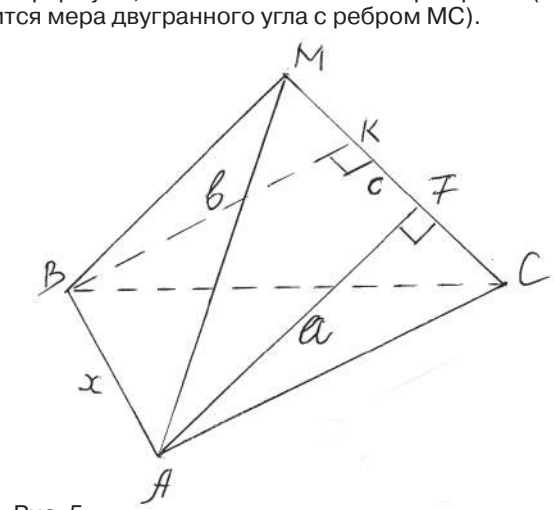

Рис. 5

Александр ФЕЛЬДМАН,
учитель математики средней школы № 19 Минска.
Фото Олега ИГНАТОВИЧА.