Настаўніцкая газета
№ 54 (8916), 19 ліпеня 2024 года

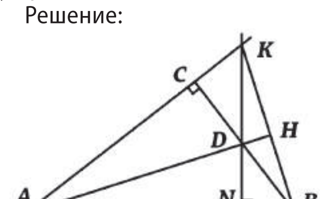
Точка пересечения высот

Точка пересечения высот треугольника, или по-другому ортоцентр, является одной из четырех замечательных точек треугольника наряду с точками пересечения биссектрис, медиан и серединных перпендикуляров треугольника. Ее использование намного упрощает решение задач. Хочу поделиться опытом решения задач по данной теме.

В задачах по планиметрии очень часто предлагаются задания на использование свойств замечательных точек треугольника. Некоторые красивые теоремы геометрии связаны с этими точками. В действующих школьных учебниках геометрии некоторые свойства замечательных точек приведены в задачах, но свойства, часто применяемые в олимпиадных задачах (задачах повышенного уровня), практически не отражены. Будущему выпускнику для успешного решения задач, развития математических способностей, творческой составляющей необходимо углубить теоретические сведения по данной теме.

1. Прямая l, перпендикулярная гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, пересекает прямые AC и BC в точках K и D соответственно. Найдите угол между прямыми AD и BK.

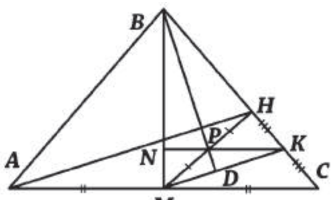
Решение:



$l \cap AB = N$. Рассмотрим ΔABK, BC и KN — высоты, а точка D — ортоцентр (точка пересечения высот в треугольнике ABK), AH — высота, поэтому прямая AD перпендикулярна прямой BK. Угол между прямыми AD и BK равен 90°.

2. Из середины основания AC точки M равнобедренного треугольника ABC опущен перпендикуляр MH на сторону BC, точка P — середина отрезка MH. Докажите, что $AH \perp BP$.

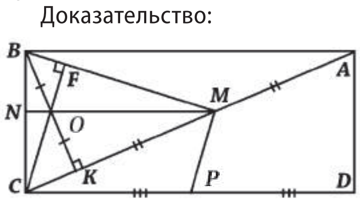
Доказательство:



Отметим K — середина CH, $AM = MC$ (BM — высота, $AB = BC$), MK — средняя линия в треугольнике AHC, $MK \parallel AH$. PK — средняя линия в MHC, $PK \parallel MC$, $MC \perp BM$, значит $KN \perp BM$, $MH \perp BK$, следовательно точка P — точка пересечения высот, $BD \perp MK$, $MK \parallel AH$, $AH \perp BD$.

3. В прямоугольнике $ABCD$ опущен перпендикуляр BK на диагональ AC и взяты середины M и P отрезков AK и CD соответственно. Докажите, что угол BMP прямой.

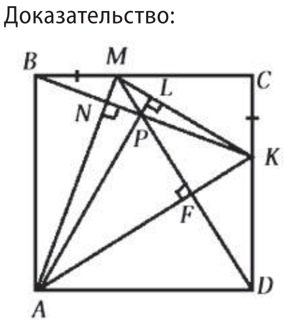
Доказательство:



Построим $MN \parallel AB$. По теореме Фалеса $BO = OK$, MO — средняя линия в треугольнике ABK, $MO \parallel AB$, $AB \parallel CP$, значит $MO \parallel CP$, $MO = 1/2\ AB = 1/2\ CD = CP$. Четырехугольник $COMP$ — параллелограмм, $CO \parallel MP$. В треугольнике CBM точка O — это точка пересечения высот, CF — высота, $CF \perp BM$, но $CF \parallel MP$, значит $BM \perp MP$, а $\angle BMP = 90°$.

4. В квадрате $ABCD$ на сторонах BC и CD отмечены точки M и K соответственно так, что $MC = KD$. Пусть P — точка пересечения отрезков MD и BK. Докажите, что прямые AP и MK перпендикулярны.

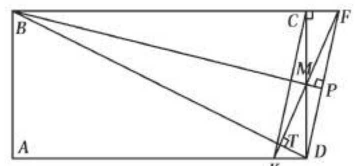
Доказательство:



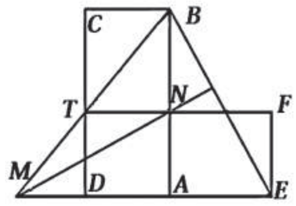
Треугольник ABM равен треугольнику BCK (по двум катетам $AB = BC$, $BM = CK$). $\angle BAM = \alpha = \angle CBK$, $\angle ABC = 90°$, $\angle ABN = 90° - \alpha$, $\angle ANB = 90°$, KN — высота треугольника AMK. Аналогично треугольник ADK равен треугольнику DCM (по двум катетам). $\angle DAK = \varphi = \angle CDM$, $\angle ADC = 90°$ $\angle ADF = 90° - \varphi$, $\angle AFD = 90°$, $\angle AFM = 90°$. MF — высота в AMK. Точка P — точка пересечения высот в AMK. AL — высота. Поэтому $AP \perp MK$.

5. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны CD. Через точку C провели прямую, перпендикулярную прямой BM, а через точку M — прямую, перпендикулярную диагонали BD. Докажите, что два проведенных перпендикуляра пересекаются на прямой AD.

Доказательство:

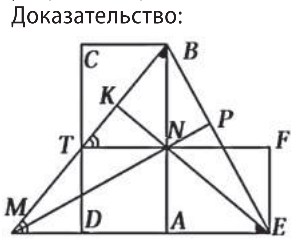


$MT \perp BD$, $MT \cap AD = K$. Мы хотим доказать, что $CK \perp BM$, $MT \cap BC = F$. Посмотрим на треугольник BDF, $CD \perp BF$, $FT \perp BD$, FT и CD — высоты, M — точка пересечения высот. Значит BP — высота треугольника BDF. $CM = MD$, $\angle CMF = \angle DMK$, $\angle FCM = \angle MDK = 90°$.



6. Через вершины B и T двух равных прямоугольников $ABCD$ и $DEFT$, расположенных, как показано на рисунке, провели прямую, которая пересекла прямую AD в точке M. Докажите перпендикулярность прямых MN и BE.

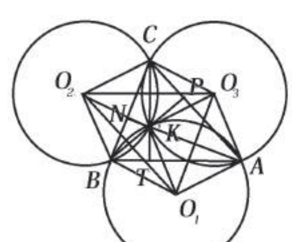
Доказательство:



Проведем луч EN. $AB \perp ME$, AB — высота ΔMBE. $\Delta BTN = \Delta ENA$ (по двум катетам). $\angle TBN = \angle NEA = \alpha$, $\angle KME = 90° - \alpha$. $\angle MKE = 180° - \alpha - (90° - \alpha)$. EK — высота треугольника MBE, N — точка пересечения высот. MP — высота, $MN \perp BE$.

7. Три равные окружности проходят через точку K. Пусть A, B, C — вторые точки пересечения этих окружностей. Найдите угол BAC, если $AK = BC$.

Решение:



$R = O_3K = O_1A = O_3A$, $\Delta O_1AO_3 = \Delta O_1KO_3$ (3-й признак), $\angle AO_1O_3 = \angle KO_1O_3 = \angle AO_3O_1 = \angle KO_3O_1 = \alpha$. O_1BO_2K — ромб. $\angle BO_1O_2 = \angle KO_1O_2 = \angle BO_2O_1 = \angle KO_2O_1 = \beta$, O_3KO_2C — ромб. $\angle CO_3O_2 = \angle KO_3O_2 = \angle CO_2O_3 = \angle KO_2O_3 = \gamma$. $\angle AO_1K = 2\alpha$ — центральный, опирается на дугу AK. $\angle ABK = \alpha$, $\angle AO_3K = 2\alpha$. $\angle ACK = \alpha$. Аналогично $\angle BO_1K = \angle BO_2K = 2\beta$, $\angle BCK = \angle BAK = \beta$, $\angle KO_3C = \angle KO_2C = 2\gamma$, $\angle KAC = \angle KBC = \gamma$, $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$, значит $\alpha + \beta + \gamma = 90°$. $\angle ANB = \angle ANC = \angle BPA = 180° - (\alpha + \beta + \gamma) = 90°$. AT, BP, CN — высоты треугольника ABC. K — точка пересечения высот. $\Delta AKT = \Delta CBT$ (по гипотенузе и острому углу). $AT = TC$, $\angle CAB = 45°$.

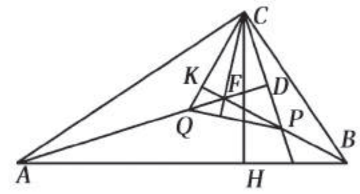
Если угол BAC тупой, то он равен 135°.

Ответ: 45° или 135°.

8. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) проведена высота CH. В образовавшиеся треугольники вписаны окружности с центрами Q и P. Докажите, что биссектриса угла ACB перпендикулярна отрезку PQ.

Доказательство:

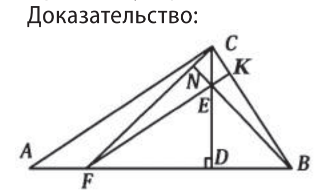
Пусть $\angle HCP = \angle BCP = \alpha$, $\angle ACQ$



$= \angle HCQ = \beta$, $2\alpha + 2\beta = 90°$, $\alpha + \beta = 45°$, $\angle QCP = 45°$, AQ — биссектриса $\angle CAB$. $D = AQ \cap CP$, $\angle CAQ = \angle BAQ = 1/2\angle A$, $\angle ACQ = \angle HCQ = 1/2\angle ACH$, $\angle ACQ + \angle CAQ = 45°$, $\angle ADC = 90°$, $K = BP \cap CQ$, $\angle PCB + \angle PBC = 45°$, $\angle BKC = 90°$. F — точка пересечения биссектрис в треугольнике ABC. С другой стороны, F — точка пересечения высот в треугольнике QPC. $CF \perp QP$, где CF — биссектриса $\angle ACB$.

9. В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе AB проведена высота CD. На отрезках CD и DA взяты точки E и F так, что $\frac{CE}{CD} = \frac{AF}{AD}$. Докажите, что прямые BE и CF перпендикулярны.

Доказательство:

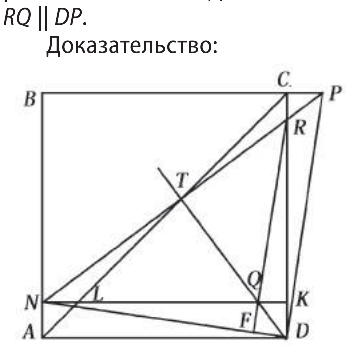


Рассмотрим треугольники EDF и DAC.

$\frac{CE}{CD} = \frac{AF}{AD}$, $\frac{CD - ED}{CD} = \frac{AD - DF}{AD}$, $\frac{ED}{CD} = \frac{DF}{AD}$, $\angle D$ — общий. $\Delta EDF \sim \Delta CDA$, значит $\angle CAD = \angle EFD$, $AC \parallel EF$, $AC \perp BC$ (усл.), $EF \perp BC$, $CD \perp BF$, E — точка пересечения высот в треугольнике FCB. $BN \perp CF$, т.е. $BE \perp CF$.

10. На сторонах AB и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки N и K соответственно так, что $BN = CK$. На продолжении стороны BC за точку C отмечена точка P так, что $CP = AN$. Пусть T — точка пересечения AC и NP, R — точка пересечения NR и CD, Q — точка пересечения NK и DT. Докажите, что $RQ \parallel DP$.

Доказательство:

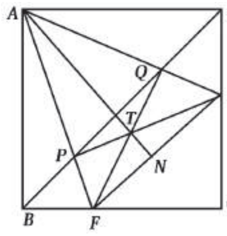


$ANKD$ — прямоугольник, $\angle BAC = 45°$, L — точка пересечения NK и AC. ΔANL равнобедренный и прямоугольный, $AN = NL = CP$. $\Delta NTL = \Delta PTC$ (по стороне и прилежащим к ней углам), значит $NT = TP$. DT — медиана в ΔNDP. $\Delta NAD = \Delta PCD$ (по двум катетам) $ND = DP$, ΔNDP равнобедренный, значит DT — высота в ΔNDR, а также NK — высота в ΔNDR, Q — точка пересечения высот в ΔNDR, поэтому RF — высота. $RF \perp ND$, $\angle ADN = \varphi = \angle CDP$, $\angle NDC = 90° - \varphi$, $\angle NDP = 90°$, $ND \perp DP$, тогда $RQ \parallel DP$.

11. Из вершины A квадрата $ABCD$ проведены два луча, образующие между собой угол в 45°. Один пересекает сторону BC в точке F, диагональ BD в точке P, другой — сторону CD в точке K, диагональ BD — в точке Q. Пусть T — точка пересечения отрезков PK и FQ. Докажите, что прямые AT и FK перпендикулярны.

Доказательство:

Поскольку $\angle FAQ = 45° = \angle ABQ = \angle QBF$ и точки A и B лежат по



одну сторону от отрезка QF, вокруг четырехугольника $ABFO$ можно описать окружность $\angle AQF = 180° - \angle ABF = 180° - 90° = 90°$. Аналогично $\angle PAK = \angle PDK = 45°$. $PADK$ вписан в окружность $\angle APK = 90°$. В треугольнике AFK отрезки FQ и PK — высоты. T — точка пересечения высот AN — высота, тогда $AN \perp FK$, т.е. $AT \perp FK$.

12. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC проведена высота BD. На продолжении BD за точку B выбрана точка K так, что $\angle CAK = \angle BCA$. Окружность, проходящая через точку B и касающаяся прямой AC в точке C, пересекает BD в точке P. Докажите, что $AP \perp KC$.

Доказательство:

$\angle BCA = \angle CAK = \gamma$, $\angle PBC = \angle CBD = 90° - \angle BCA = 90° - \gamma = 1/2 \cup PKC$, $\angle PBC$ — вписанный. $\angle PCA$ — угол между касательной и хордой, $\angle PCA = 1/2 \cup PKC = \angle PBC = 90° - \gamma$, $\angle ARC = 180° - \angle RAC - \angle RCA = 180° - 90° = 90°$. KD и RC — высоты треугольника AKC. Точка P — ортоцентр в треугольнике AKC, AN — высота. Поэтому $AN \perp KC$, т.е. $AP \perp KC$.

13. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, а AA_1 — диаметр его описанной окружности. Докажите, что отрезок A_1H делит BC пополам.

14. Дан остроугольный треугольник ABC. На продолжениях сторон AC за точку C, CB за точку B, BA за точку A взяты соответственно точки B_1, A_1, C_1 так, что $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$. Докажите, что ортоцентр (точка пересечения высот) $\Delta A_1B_1C_1$ совпадает с центром окружности, описанной около ΔABC.

15. Прямая l, перпендикулярная гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, пересекает прямые AC и BC в точках E и D соответственно. Найдите угол между прямыми AD и BE.

16. Две окружности S_1 и S_2 с центрами в точках O_1 и O_2 соответственно касаются друг друга в точке A. Из точки O_1 проведена касательная к S_2, касающаяся ее в точке C, причем точки B и C лежат по одну сторону от прямой O_1O_2. Пусть O_3 — точка пересечения прямых O_1C и O_2B. Докажите, что если прямые O_3A, O_1B и O_2C пересекаются в одной точке, то $O_1O_2O_3$ — равносторонний.

17. Найдите геометрическое место таких точек M, для которых имеют место равенства $\angle MAB = \angle MCA$, где ABC — данный остроугольный треугольник.

18. Высоты AD, BE и CF остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $S_{AEHF} = S_{HECD}$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

Альфред ЛАДЫКО,
учитель математики гимназии № 1 Лиды.

Фото Ирины АНИКЕВИЧ.