Исследовательские задания
XXVII республиканского турнира юных математиков

Важные указания к порядку решения и оформления исследований по заданиям турнира юных математиков

Обращаем ваше **ВНИМАНИЕ** на то, что предлагаемые задания (далее – задачи) носят исследовательский характер (в отличие от олимпиадных задач). Полные решения и наилучшие обобщения этих задач неизвестны даже авторам, поэтому:

- во-первых, **необязательно решать все задачи** – необходимое количество представляемых в жюри задач – 7, а итог будет подводиться по 9 лучшим, т.е. наиболее полно и верно решенным Вами задачам (подробнее см. правила проведения турнира и правила математического боя на странице «Республиканский турнир юных математиков» (на сайте www.uni.bsu.by);
- во-вторых, **наиболее полное решение (исследование)** задачи не означает, что нужно решить ВСЕ ПУНКТЫ задачи, точнее – решаем «настолько полно насколько можем», имейте в виду, что в ряде задач интерес представляют даже ***первые пункты или отдельные частные случаи*** *заданий (их пунктов или небольших значений параметров)*;
- в-третьих, возможно (это допускается и даже приветствуется) вы *сможете усилить ряд утверждений*, приведенных в формулировках задач;
- в-четвертых, кроме рассмотрения исходной постановки *полезно рассмотреть свои направления*, причем ваши исследования **НЕОБЯЗАТЕЛЬНО** должны совпадать с предложениями авторов;
- **ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО КАЖДОЙ ЗАДАЧЕ НЕОБХОДИМО ОФОРМИТЬ ОТДЕЛЬНО** от других задач в распечатанном виде **в двух экземплярах** (до 30 стр. формата А4), а также в электронной форме в pdf-формате (образец названия файлов «Brest-gym97-2025-problem7-predvar»), при этом:
  - **оформление каждой задачи должно начинаться С ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА**, на котором нужно указать номер задачи и ее название, название учреждения образования, название команды (если команда является сборной двух или нескольких учреждений), город, автора(ов) исследования (решения);
  - **НИЖЕ НА ТИТУЛЬНОМ ЛИСТЕ** (или на втором листе) **обязательно дайте краткое резюме вашего исследования** – какие пункты вы решили, какие сделали обобщения, четко сформулируйте ВАШИ СОБСТВЕННЫЕ ГЛАВНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ (утверждения, примеры, гипотезы);
  - **ОБЯЗАТЕЛЬНО** дайте **четкие ссылки на литературу и другие источники**, которые вы использовали при проведении исследований (**в месте их использования**).

Сроки представления: **предварительных заявок на турнир – 28 октября 2025 г.,**
- официальных заявок – 31 октября 2025 г.,
- предварительных материалов – не позднее 7 ноября 2025 г.
Подробнее см. на сайте www.uni.bsu.by на странице турнира.

Задача 1. Суммы подмножеств

Пусть дан набор из n различных чисел $a_1<a_2<\ldots<a_n$. Будем рассматривать все возможные суммы ровно k из этих чисел.

1. При n=3, k=2 получили следующие значения сумм: 3, 11, 12. Найдите числа a_1, a_2, a_3.

2. Возможна ли при n=3, k=2 ситуация, когда некоторые из получаемых сумм будут совпадать (следует помнить, что $a_1<a_2<a_3$)? Если да, то опишите все наборы значений $a_1<a_2<a_3$, при которых некоторые из значений получаемых сумм будут совпадать.

3. При n=5, k=3 получили следующие значения сумм: 10, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 23, 24, 26. Найдите числа a_1, a_2, a_3. a_4, a_5.

4. Возможна ли при n=5, k=3 ситуация, когда некоторые из получаемых сумм будут совпадать (следует помнить, что $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$)? Если да, то опишите все наборы значений $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$, при которых некоторые из значений получаемых сумм будут совпадать.

5. Пусть n=5, k=3. Для заданного набора чисел $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$ будем выписывать множества номеров слагаемых сумм в порядке возрастания (неубывания) значений этих сумм. Например, для набора a_1=0, a_2=1, a_3=2, a_4=5, a_5=8 получим следующую последовательность множеств номеров слагаемых сумм {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4}, {1, 2, 5}, {1, 3, 5}, {2, 3, 5}, {1, 4, 5}, {2, 4, 5}, {3, 4, 5}. Две последовательности множеств номеров будем считать различными, если найдётся такая позиция в этих последовательностях, что в них на этой позиции будут стоять не равные множества. Множества называются не равными, если существует элемент, который содержится только в одном из множеств.

а) Сколько существует таких различных последовательностей?

б) Существуют ли такие позиции, что во всех получаемых последовательностях на них будут находится одни и те же множества? Если да, то укажите все такие позиции.

6. Рассмотрите вопросы пункта 5 при n=6, k=4.

7. Рассмотрите вопросы пункта 5 при n=6, k=3.

8. Будем говорить, что множество x номеров слагаем *предшествует* y $(x \le y)$, если для любого набора $a_1<a_2<\ldots<a_n$ сумма слагаемых с номерами из x будет меньше или равна сумме слагаемых с номерами из y. Будем говорить, что u *предшествует* v ***через*** $x \le y$, если $u \le x$ и $y \le v$. Будем говорить, что u *предшествует* v ***при*** $x \le y$, если для любого набора $a_1<a_2<\ldots<a_n$, в котором сумма слагаемых с номерами из x будет меньше или равна сумме слагаемых с номерами из y, сумма слагаемых с номерами из u будет меньше или равна сумме слагаемых с номерами из v.

а) Верно ли, что при любых допустимых значениях n и k и любых множествах номеров слагаемых x, y, u и v если u предшествует v при $x \le y$, то u предшествует v через $x \le y$.

б) При каких значениях n и k при любых множествах номеров слагаемых x, y, u и v если u предшествует v через $x \le y$, то u предшествует v при $x \le y$?

в) При каких значениях n и k найдутся множества номеров слагаемых x, y, u и v, что u предшествует v через $x \le y$, но u не предшествует v при $x \le y$?

9. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и исследуйте их.

Задача 2. Отделённость итераций от нуля

Пусть функция f определена на отрезке $[0;1]$ и принимает значения из этого же промежутка, причём $f(0)=f(1)=0$. Пусть, кроме того, функция f выпуклая вверх (то есть для любых $0 \le x \le y \le z \le 1$ верно неравенство $(z-x)f(y) \ge (z-y)f(x)+(y-x)f(z)$), найдётся такое $x_{\max} \in (0;1)$, что $f(x_{\max})=1$, и найдутся такие $x_1 \in (0, x_{\max})$ и $x_2 \in (x_{\max}, 1)$, что $0 < f(x_1) < 1$ и $0 < f(x_2) < 1$. Будем называть такие функции *интересными*.

Обозначим n-ю итерацию f через f_n, то есть $f_1(x)=f(x)$ для всех $x \in [0;1]$, и для любого $n \in N$: $f_{n+1}(x)=f\big(f_n(x)\big)$ для всех $x \in [0;1]$. Обозначим множество значений всех итераций для данной точки через $f_*(x)=\{f_n(x) | n \in N\}$. Будем называть множество $f_*(x)$ отделённым от нуля не менее чем на $\delta>0$, если для всех $n \in N$ $f_n(x) \ge \delta$. Будем говорить, что множество $f_*(x)$ отделено от нуля, если найдётся такое $\delta>0$, что множество $f_*(x)$ будет отделённым от нуля не менее чем на δ.

Обозначим множество всех таких значений x, что $f_*(x)$ отделено от нуля не менее чем на $\delta>0$ через $X_f(\delta)$, а множество всех таких значений x, что $f_*(x)$ отделено от нуля через X_f.

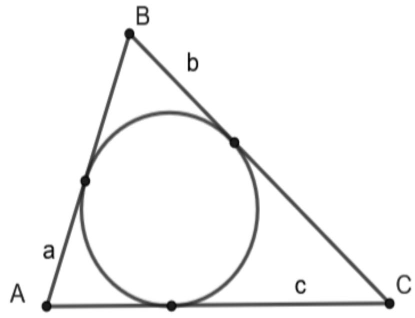
I. Установите, всякая ли интересная функция f, обладает следующими свойствами:
   1. Найдётся такое значение $x_1 \in (0;1)$, что $f(x_1)=1$ и $f(x)<1$ для всех $x \in [0;x_1)$. Будет ли при этом функция f возрастающей на $[0;x_1]$?
   2. Найдётся такое значение $x_2 \in (0;1)$, что $f(x_2)=1$ и $f(x)<1$ для всех $x \in (x_2;1]$. Будет ли при этом функция f убывающей на $[x_2;1]$.
   3. $f(x)=1$ для всех $x \in [x_1;x_2]$, где x_1 и x_2 из пунктов 1 и 2.

II. Для функций $f_1(x)=\min\{kx/(k-1), k(1-x)\}$, где $k>1$; $f_2(x)=\min\{x/a, (1-x)/b, 1\}$, где $a>0$, $b>0$ и $a+b<1$; $f_3(x)=4x(1-x)$ исследуйте следующие вопросы:
   1. Является ли функция (функции указанного вида) интересной?
   2. Приведите примеры, если существуют, значений из $(0;1)$, принадлежащих X_f, и не принадлежащих X_f.
   3. Найдутся ли такие δ_1 и δ_2, что $\delta_1<\delta_2$, что ни одно из множеств $X_f(\delta_1)$ и $X_f(\delta_2)$ не является подмножеством другого?
   4. Приведите примеры, если существуют, значений $\delta>0$, для которых $X_f(\delta) \ne \emptyset$, и для которых $X_f(\delta)=\emptyset$.
   5. Каковы значения b, что $X_f(\delta) \ne \emptyset$ для всех $0<\delta<b$, и B, что $X_f(\delta)=\emptyset$ для всех $\delta>B$? Насколько близкими могут быть значения b и B? Могут ли они совпадать? Если могут, то приведите соответствующие примеры.

III. Предложите свои направления в этой задаче и исследуйте их.

Задача 3. Уравнение треугольника

Всюду в дальнейшем используются такие обозначения: R – радиус описанной, а r – радиус вписанной окружностей некоторого треугольника, p – его полупериметр, а уравнение $F(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=0$, где a – длина отрезка касательной, проведённой из вершины A треугольника до точки касания, b и c определяются аналогично (см. рисунок) – называть уравнением треугольника.



1. Доказать, что треугольник с данными R и r существует при $R > 2r$.

2. Доказать, что треугольник с $R = 18$, $r = 8$, $p = 45$ существует.

3. Докажите, что уравнение треугольника может быть записано в виде

$$F(x) = x^3 - px^2 + (r^2 + 4Rr)x - r^2p = 0.$$

4. Доказать, что при $R = 18$, $r = 8$, $p = 45$ уравнение треугольника не имеет рациональных корней.

5. Существует ли треугольник ровно с одним целым корнем уравнения треугольника?

6. Существует ли треугольник ровно с двумя целыми корнями уравнения треугольника?

7. Существует ли треугольник с тремя целыми корнями уравнения треугольника?

8. Существует ли треугольник ровно с одним дробным корнем уравнения треугольника (*здесь и ниже слово «дробный» означает любой не целый*)?

9. Существует ли треугольник ровно с двумя дробными корнями уравнения треугольника?

10. Существует ли треугольник с тремя дробными корнями уравнения треугольника?

11. Существует ли треугольник ровно с одним иррациональным корнем уравнения треугольника?

12. Существует ли треугольник ровно с двумя иррациональными корнями уравнения треугольника?

13. Существует ли треугольник с тремя иррациональными корнями уравнения треугольника?

14. Предложите свои направления исследования этой задачи и решите их.

Задача 4. Без касаний

I. Дано натуральное число n, множество связных фигур F и правило A. В квадрате со стороной n провели все прямые, параллельные одной паре противоположных сторон и отсекающие от других отрезок натуральной длины. Полученную решётку назовём I. Определите, какое наибольшее количество фигур из множества F (одну фигуру можно использовать несколько раз, фигуры можно поворачивать) можно разместить в этом квадрате в соответствии с правилом A так, чтобы любые 2 фигуры не имели общих точек.

1. Правило A – 1. “Фигуры состоят из клеток I”.

   a. Множество F содержит только уголок, состоящий из трёх клеток.
   b. Даны натуральные числа s, t. Множество F содержит только прямоугольник s×t.
   c. Дано натуральное число s. Множество F – клетчатые фигуры, состоящие из s клеток.

2. Правило А – 1. “Фигуры состоят из прямоугольных равнобедренных треугольников, получаемых проведение диагонали из клетки I”.
   a. Дано натуральное число s. Множество F – все фигуры, состоящие из клеток и прямоугольных равнобедренных треугольников с катетом длины 1, площади $s/2$.

II. Дано натуральное число n, множество связных фигур F и правило A. В равностороннем треугольнике со стороной n провели все прямые, параллельные одной из сторон и отсекающие от других отрезок натуральной длины. Полученную решётку назовём E. Определите, какое наибольшее количество фигур из множества F (одну фигуру можно использовать несколько раз, фигуры можно поворачивать) можно разместить в этом треугольнике в соответствии с правилом A так, чтобы любые 2 фигуры не имели общих точек.

3. Правило А – 1. “Фигуры состоят из клеток E”.
   a. Дано натуральное число s. Множество F содержит только равносторонний треугольник со стороной s.
   b. Дано натуральное число s. Множество F – все фигуры, состоящие из s равносторонних треугольников со стороной 1.

III-IV. Ответьте на те же вопросы для квадрата и треугольника, если любые 2 фигуры имеют не более 1 общей точки.

IV. Можете предложить свои направления исследования.

Задача 5. Чевианы в нечётноугольниках

Рассмотрим выпуклый $(2k + 1)$-угольник $A_1A_2 \dots A_{2k+1}$. Далее будем считать, что $A_i = A_{i+2k+1}$ для любого целого i.

1. Высотой, проведённой из вершины A_i в в многоугольнике $A_1A_2 \dots, A_{2k+1}$, назовём прямую, проходящую через вершину A_i перпендикулярно прямой $A_{i+k}A_{i-k}$.
   1.1 Рассмотрим случай $k = 2$, докажите, что если 4 высоты в этом пятиугольнике проходят через одну точку, то и пятая пройдёт через неё. Можно ли вместо 4 высот взять 3 высоты?
   1.2 Докажите, что если $2k$ высоты в этом многоугольнике проходят через одну точку, то и $2k+1$ высота пройдёт через неё.
   1.3 Для какого минимального m можно гарантировать, что если m высот $2k+1$-угольника пересекаются в одной точке, то и все остальные высоты пройдут через эту точку?
2. Биссектрисой, проведённой из вершины A_i в многоугольнике $A_1A_2 \dots, A_{2k+1}$, назовём биссектрису угла $A_{i-k}A_iA_{i+k}$. Останутся ли верными утверждения из пункта 1?
3. Медианой, проведённой из вершины A_iв в многоугольнике $A_1A_2 \dots A_{2k+1}$, назовём прямую, проходящую через вершину A_i и середину отрезка $A_{i+k}A_{i-k}$. Останутся ли верными утверждения из пункта 1?
4. Симедианой, проведённой из вершины A_i в многоугольнике $A_1A_2 \dots, A_{2k+1}$, на-

зовём прямую, получающуюся отражением медианы относительно биссектрисы вершины A_i в многоугольнике $A_1A_2 \dots A_{2k+1}$? Останутся ли верными утверждения из пункта 1?

5. В этом пункте зафиксируем две невырожденные непересекающиеся кривые второго порядка ω и Ω. (Подробнее про кривые второго порядка можно прочитать в Акопян А. В., Заславский А. А. «Геометрические свойства кривых второго порядка»).
   5.1 Рассмотрим выпуклый пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$, такой, что все его вершины лежат на Ω и все его стороны касаются ω. Пусть в этом пятиугольнике все биссектрисы пересекаются в одной точке. Построим ещё один пятиугольник, стороны которого касаются ω, а вершины лежат на Ω. Он существует из теоремы Понселе о замыкании. Докажите, что его биссектрисы так же пересекаются в одной точке, при этом эта точка не зависит от выбора пятиугольника.
   5.2 Рассмотрим многоугольник $A_1A_2 \dots A_{2k+1}$, такой, что все его вершины лежат на Ω и все его стороны касаются ω. Пусть в этом многоугольнике все биссектрисы пересекаются в одной точке. Построим ещё один n-угольник, стороны которого касаются ω, а вершины лежат на Ω. Он существует из теоремы Понселе о замыкании. Докажите, что его биссектрисы так же пересекаются в одной точке, при этом эта точка не зависит от выбора пятиугольника.
   5.3 Докажите, что при $k > 3$ утверждение пункта 5.2 верно и для медиан.
   5.4 Изучите предыдущие пункты для высот и симедиан.
6. Предложите свои обобщения.

Задача 6. В поисках минимы

Дан неориентированный граф $G = (V, E)$ и функция $f: E \to \mathbb{R}$, ставящая в соответствие каждому ребру e действительное число $f(e)$. Ориентируем как-либо каждое ребро графа G и получим некоторый ориентированный граф G^*. Полученный граф G^* будем называть *ориентиром* графа G, а граф G — *остовом* графа G^*. Для любой вершины v через $E_+(v)$ обозначим множество направленных рёбер, входящих в v, а через $E_-(v)$ — множество направленных рёбер, выходящих из v. *Весом $h(v)$ вершины v* назовём величину

$$h(v) = \sum_{e \in E_+(v)} f(e) - \sum_{e \in E_-(v)} f(e).$$

Весом $h(G^*)$ ориентированного графа G^* назовём $h(G^*) = \max\limits_{v \in V} |h(v)|$. *Абсолютным весом вершины v* назовём величину

$$H(v) = \sum_{e \in E_-(v)} |f(e)| + \sum_{e \in E_+(v).} |f(e)|.$$

Обратим внимание, что абсолютный вес не зависит от выбора ориентира. Аналогично определим *абсолютный вес $H(G)$ графа G*. *Минимой $m(G)$ графа G* назовём минимальный возможный вес графа G^*, полученного из G ориентированием всех его рёбер, то есть

$$m(G) = \min_{G^*} h(G^*)\,,$$

где минимум берётся по всем ориентирам G^* графа G.

1. Докажите, что для любого ориентира G^* графа G выполнено

$$\sum_{v \in V} h(v) = 0.$$

2. а) Предположим, $f(e) = 1$ для всех $e \in E$. Докажите, что $m(G) \leq 1$.

б) Опишите все графы G, удовлетворяющие пункту 2а), для которых $m(G) = 1$.

3. а) Предположим $f(e) \in \{1,2\}$ для всех рёбер e и $H(v)$ нечётно для всех вершин v. Для каждого графа G найдите $m(G)$ в этом случае.

б) Как изменится ответ пункта а), если теперь необязательно $H(v)$ нечётно для всех вершин v?

в) Как изменится ответ пункта б), если теперь $f(e) \in \{a, b\}$ для любого $e \in E$ для некоторых вещественных положительных чисел a и b?

4. Предположим, $H(v) = 1$.

а) Найдите или оцените максимальное возможное значение M величины $m(G)$ среди всех графов с $|V| = n$ (Ответ может зависеть от n).

б) Можете ли вы описать все графы (или хотя бы предъявить какую-то бесконечную серию графов), для которых существует такая функция f, что $H(v) = 1$ и $m(G) = M$?

5. Исследуйте вопросы пунктов 4а) и 4б), если условие $H(v) = 1$ заменить на условие $\max\limits_{e \in E} |f(e)| = 1$.

6. Попытайтесь предложить какие-то разумные оценки в пункте 5, если дополнительно известно, что $\min\limits_{e \in E} |f(e)| = a$ при некотором $a < 1$.

7*. Если вы знакомы с алгоритмами, попытайтесь придумать и описать алгоритм, позволяющий по графу G и функции f найти $m(G)$. Оцените сложность полученного алгоритма и попробуйте его оптимизировать.

8. Предложите свои обобщения и исследуйте их.

.

Задача 7. Рекуррентные функции

Будем понимать функцию, как черный ящик, который по целым неотрицательным числам выдает целое неотрицательное число. Нам понадобятся функции от одного и от двух аргументов – соответственно, на вход они принимают одно или два числа.

1. Рассмотрим функцию f от двух аргументов. Известно, что $f(a, b) = f(b, a)$, значение $f(a, 0)$ определено однозначно для каждого a, и если $a > b$, то $f(a, b) = f(a - b, b)$. Докажите, что в таком случае функция f однозначно определена для всех значений (a, b).

2. Пусть при тех же условиях $f(a, 0) = a$. Чему равно $f(a, b)$?

3. Что произойдет со значением $f(a, b)$, если $f(a, 0)$ определять иным образом?

4. Поменяем определение функции f. По прежнему $f(a, b) = f(b, a)$ и $f(a, 0)$ заранее известно, но теперь $f(a, b) = T(f(a - b, b))$, где $T(x)$ – некоторая функция от одной переменной. Докажите, что значение $f(a, b)$ снова однозначно определяется для всех пар (a, b).

5. Пусть $T(x) = x + k$, где k – некоторое натуральное число; $f(a, 0)$ определено каким-либо образом. Чему в таком случае равно $f(a, b)$?

6. Рассмотрим функцию h от двух аргументов. Про нее известно следующее:
а) $h(ac, b) = h(a, b) \cdot h(c, b)$ для любых a, b, c;
б) $h(a, bc) = h(a, c) \cdot h(b, c)$ для любых a, b, c;
в) $h(a, a)$ заранее определена однозначным образом;
г) $h(a, b) = h(a \bmod b, b)$ при $a > b$ и $b > 0$;
д) $h(0, t)$, $h(1, t)$, $h(2, t)$, $h(t, 0)$, $h(t, 1)$, $h(t, 2)$ заранее определены однозначным образом;
е) $h(p_1, p_2) = \mathrm{T}(h(p_1, p_2))$ где p_1, p_2 – нечетные простые числа, $p_1 < p_2$, $T(x)$ – некоторая функция от одной переменной.

Докажите, что значение $h(a, b)$ однозначно определено для всех значений (a, b).

Задача № 8. Авиапутешествия с ограничениями

На планете Ў4613 есть N городов. Пришельцы Матвей и Тимофей собираются связать их двусторонними авиарейсами. При этом не обязательно, чтобы из каждого города можно было добраться до каждого авиарейсами. За K_n обозначим множество из $n \geq 1$ городов такое, что каждые два соединены авиарейсами. Назовём простым циклом длины $n \geq 3$ и обозначим C_n, последовательность из n различных городов, в которой каждый следующий соединён с предыдущим (и последний с первым). Два простых цикла считаются различными, если в одном из них есть хотя бы один авиарейс, которого нет в другом.

Во всех пунктах ответ может зависеть от N. Во всех пунктах, даже если не был получен ответ, нахождение конфигурации, в которой максимальное число объектов достигается, уже представляет большой интерес.

1. К сожалению, Матвею не нравится, как выглядят пути длины 3, так что в получившейся системе авиарейсов их не будет. Какое наибольшее количество авиарейсов на планете может быть при таком условии? Путь длины 3 – три различных авиарейса таких, что второй начинается в городе, где заканчивается первый, а третий начинается там, где заканчивается второй.

2. Теперь Матвей запрещает строить простые циклы нечётной длины. Какое наибольшее количество авиарейсов на планете может быть? (В каждом пункте запреты из предыдущих пунктов не учитываются)

3. Матвей запрещает простые циклы нечётной длины. Какое наибольшее количество C_k может быть?

4. Тимофей не любит полные подграфы и запрещает K_3. Какое наибольшее количество авиарейсов может быть?

5. Тимофей запрещает K_4. Какое наибольшее количество авиарейсов? Какое наибольшее количество K_3?

6. Матвей запрещает C_4. Какое наибольшее количество авиарейсов? K_3?

7. Тимофей запрещает K_3. Какое наибольшее количество C_4? C_m?

8. Тимофей запрещает K_4. Какое наибольшее количество C_4? C_m?

9. Тимофей запрещает K_n. Какое наибольшее количество K_m? C_m?

10. Матвей запрещает C_n. Какое наибольшее количество K_m? C_m?

11. Изменится ли что-нибудь, если жители планеты потребуют, чтобы из каждого города можно было добраться до каждого авиарейсами?

12. Предложите свои обобщения и дополнения к данной задаче и исследуйте их.

Задача № 9. Веселые неравенства

Для произвольного набора положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ определим величину $S_k = a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k$ для каждого $k \in R^+$.

Часть 1

1. Существует ли набор, состоящий из двух положительных чисел, что выполняется неравенство $S_2 < S_1 < S_3$. А есть ли набор из трёх чисел?

2. Существует ли такое n, что найдутся n положительных чисел, для которых выполняется неравенство $S_1 > S_2 > S_3 < S_4 S_5 < \ldots$?

3. Существует ли такое n, что найдутся n положительных чисел, для которых выполняется неравенство $S_1 < S_2 < S_3 > S_4 S_5 > \ldots$?

4. Существует ли для любого $k > 3$ такое n, что найдутся n положительных чисел, для которых выполняется неравенство $S_1 > S_2 > \ldots > S_k < S_{k+1} < \ldots$?

5. Существует ли для любого $k > 3$ такое n, что найдутся n положительных чисел, для которых выполняется неравенство $S_1 < S_2 < \ldots < S_k > S_{k+1} > \ldots$; $k > 3$?

6. Предложите свои обобщения к данной задаче и исследуйте их.

Часть 2

1. Существует ли набор, состоящий из двух положительных чисел, что выполняется неравенство $\sqrt{S_2} < \sqrt[3]{S_3}$? А есть ли набор из трёх чисел?

2. Существует ли набор, состоящий из двух положительных чисел, что выполняется неравенство $\sqrt[3]{S_3} < \sqrt[4]{S_4}$? А есть ли набор из трёх чисел?

3. Существует ли набор, состоящий из двух положительных чисел, что выполняется неравенство $\sqrt[n]{S_n} < \sqrt[n+1]{S_{n+1}}$, где $n \in N, n > 3$? А есть ли набор из трёх чисел?

4. Выполняется ли всегда неравенство $\sqrt[n]{S_n} \geq \sqrt[m]{S_m}$, где $n, m \in N, n < m$, для произвольного набора положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$; $k > 3$?

5. Выполняется ли всегда неравенство $\sqrt[r]{S_r} \geq \sqrt[t]{S_t}$, где $r, t \in R^{+, r<t}$, для произвольного набора положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$; k – любое натуральное число?

6. Предложите свои обобщения и дополнения к данной задаче и исследуйте их.

Задача № 10. Эх, циркули-линейки

Буратино, как всегда, попал на пересдачу единственный на потоке. В этот раз экзамен был по геометрии и Буратино забыл взять с собой циркуль и линейку. Его учитель, Карабас Барабас, очень зол, что ему приходится приходить в университет ради одного человека, поэтому он решил брать с Буратино деньги за использование своих циркуля и линейки. В частности, Буратино может делать только следующие построения:

- Поставить случайную точку на плоскость/прямую/окружность – бесплатно,
- Поставить точку в пересечении объектов – бесплатно,
- Провести прямую через 2 точки - 1 золотой,
- Провести окружность по её центру и точке на ней – 1 золотой.

Помогите Буратино сдать экзамен!

Для каждого пункта найдите минимальные затраты на построение необходимой конструкции, алгоритм её построения, а также докажите, что нельзя обойтись меньшими затратами.

1. Даны две различные точки. Постройте серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему их.

2. Даны две различные точки. Постройте середину отрезка, соединяющего их.

3. Дана окружность. Постройте её центр.

4. Дана прямая и точка, не лежащая на ней. Постройте перпендикуляр, опущенный из точки на прямую.

5. Дана прямая и точка, лежащая на ней. Постройте перпендикуляр, восстановленный из точки на прямой.

6. Дана прямая и точка, не лежащая на ней. Постройте прямую, параллельную данной прямой и проходящую через данную точку.

7. Даны два различных луча, выходящие из одной точки. Постройте биссектрису угла между лучами.

8. Дана окружность и точка на ней. Постройте касательную к окружности, проходящую через заданную точку.

9. Дан квадрат. Постройте вписанную в него окружность.

10. Дана окружность, её центр и точка A, лежащая на окружности. Постройте квадрат, вписанный в эту окружность, одна из вершин которого - точка A.

11. Предложите свои обобщения к данной задаче и исследуйте их.

Задача № 11. О сумме квадратов делителей

Для натурального числа n обозначим за $\sigma_2(n)$ сумму квадратов всех натуральных делителей n. Будем называть натуральное число n красивым, если $\sigma_2(n) ⋮ n$ (здесь и далее знак ⋮ означает «делится нацело на»).

Число называется свободным от квадратов, если оно не делится ни на один полный квадрат, кроме 1.

1. Определите, конечно или бесконечно множество красивых чисел.
2. Существуют ли натуральные числа k и x такие, что $2^k x^2$ красивое?
3. а) Существуют ли красивые свободные от квадратов числа, кратные 3?

   б) существуют ли красивые свободные от квадратов числа, кратные простому числу p, где $(p + 1) ⋮ 4$?

   в) Существуют ли красивые свободные от квадратов числа n такие, что $(n+1) ⋮ 4$?
4. Пусть p - простое число. Обязательно ли существует

   а) красивое число n, кратное p?

   б) красивое свободное от квадратов число n, кратное p, если $(p-1) ⋮ 4$.
5. Пусть $n \neq 150$ - красивое натуральное число, а p - его наибольший простой делитель. Известно, что для любого натурального числа $x > 1$, меньшего p, n не делится на x^2. Докажите, что n свободно от квадратов.

Назовем натуральное число n 2-совершенным, если сумма квадратов его собственных делителей равна n.

6. а) Докажите, что 2-совершенных чисел не существует.

   б) Среди всех красивых чисел $n > 1$ найдите минимально возможное значение $\sigma_2(n)/n$.

Пусть $\pi_2(N)$ - количество красивых натуральных чисел от 1 до N.

7. Найдите асимптотику функции π_2, или близко оцените её сверху и снизу.

8. Для различных функций $f(n)$ попробуйте изучить когда $\sigma_2(n) ⋮ f(n)$.
9. Предложите свои обобщения задачи и исследуйте их.

Задача № 12. Полки в шкафу

У Всеслава в шкафу бесконечно много полок, он решил положить на них по очереди все неотрицательные целые числа следующим образом:

– 0 лежит на первой полке.
– Натуральное число n лежит на полке с наименьшим номером, что для любого m если $n^2 + 1 \;...\; m^2 + 1$, то номер полки n строго больше номера полки m.

Через $f(n)$ обозначим номер полки числа n, уменьшенный на 1 (то есть $f(0) = 0$, $f(1) = 1$,...).

1. Найдите все нечётные числа n, лежащие на второй полке (то есть n, для которых $f(n) = 1$).

2. Пусть для некоторых n,m верно $(n^2 + 1) ⋮ (m^2 + 1)$ и $m < n$. (Здесь и далее знак ⋮ означает «делится нацело на»).

а) Докажите, что $m < 0{,}75n$.

б) Докажите, что для всех целых неотрицательных n верно $(4/3)^{f(n)} \leqslant n + 1$.

3. Улучшите оценку пункта 2.б) на $2^{f(n)+1} \leqslant 3n + 3$.

4. Докажите, что для любого $A \in N$ есть число, лежащее на полке с номером не меньше A (то есть $f(n)$ неограничена).

5. Докажите, что на второй полке лежит бесконечно много чисел.

6. Докажите, что на всех полках, кроме первой, лежит бесконечного много чисел.

Далее для двух целых неотрицательных чисел Всеслав определил наименьший кратный по шкафу (далее – НКШ): Пусть для пары чисел (a,b) существует n, что $(n^2+1) ⋮ (a^2 +1)$ и $(n^2 + 1) ⋮ (b^2 + 1)$ и для любого m, если $m^2 + 1$ делится на $a^2 + 1$ и $b^2 + 1$, то делится и на $n^2 + 1$, тогда НКШ$(a,b) = n$ и не определён иначе.

7. Докажите, что существует бесконечно много пар чисел (a,b), что ни одно из $a^2 + 1$ и $b^2 + 1$ не делится на второе, но НКШ(a,b) определён.

8. Докажите, что существует бесконечно много пар (a,b), что НКШ(a,b) не определён.

9. Предложите свои обобщения и другие направления исследования.

№ 13. Прекрасные суммы – 2

Пусть $r \geqslant 2$ – натуральное число. Для набора $K = (k_1, k_2, ..., k_r)$ натуральных чисел и множества S натуральных чисел назовём пару (K,S) *прекрасной*, если в множестве S есть хотя бы r элементов и для любых элементов $x_1, x_2, ..., x_r$ множества S, для которых $x_1 < x_2 < ... < x_r$, число $k_1x_1 + k_2x_2 + ... + k_rx_r$ также принадлежит S.

1. а) Докажите, что для любого набора K существует множество S такое, что пара (K,S) прекрасна.

б) Верно ли, что если пары (K,S_1) и (K,S_2) прекрасные,то пара $(K,S_1 \cup S_2)$ тоже прекрасная?

2. Пусть (K,S) – некоторая прекрасная пара и $K = (k_1, k_2, ..., k_r)$.

а) Докажите, что множество S бесконечно.

б) Может ли оказаться, что существует лишь конечное количество наборов $L = (\ell_1,\ell_2,...,\ell_r)$ таких, что пара (L,S) тоже прекрасная?

3. а) Докажите, что если $K = (1,1)$ и пара (K,S) прекрасна, то существует натуральное число m, для которого $mn \in S$ при любом натуральном n.

б) Ответьте на вопрос пункта 3а) для набора $K = (1,1,1)$.

в) Ответьте на вопрос пункта 3а) для набора $K = (1,1,...,1)$, состоящего из $r \geqslant 4$ единиц.

г) Попытайтесь ответить на вопрос пункта 3а) для произвольного набора K.

Будем говорить, что набор $K = (k_1, k_2, ..., k_r)$ является *регулярным*, если существует такой индекс $i \in \{1, 2, ..., r - 1\}$, что $k_i \leqslant k_i + 1$. Через $A_S(n)$ обозначим количество чисел в множестве S, не превосходящих n.

4. Дана прекрасная пара (K,S) для некоторого регулярного набора K. Докажите, что для некоторого $c > 0$ и любого натурального n выполнено неравенство
$$A_S(n) \geq c\sqrt{n} - d.$$
5. Как вы можете оценить $A_S(n)$ снизу для произвольной прекрасной пары (K,S) для нерегулярного набора K?
6. Пусть α – действительное число из полуинтервала $(0,1]$. При каких условиях на K можно утверждать, что $A_S(n) \geqslant cn^{\alpha} - d$ для некоторых $c > 0$ и $d \in \mathbb{R}$? Можно начать исследование с частных случаев, например $\alpha = 1$ или $\alpha = 2/3$.
7. Предложите свои обобщения, связанные с прекрасными парами, и исследуйте их.